УДК 629.124.72
С 60

НОРМИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ НАГРУЗОК, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СУДНО, С УЧЕТОМ КОНЕЧНОСТИ ИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

О. И. Соломенцев, д-р техн. наук

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. Рассмотрено нормирование волновых нагрузок, действующих на корпус судна, с учетом конечности их максимальных значений. Получен закон распределения амплитуд этих нагрузок для случая распределения ординат по закону Пирсона типа I.

Ключевые слова: нормативная волновая нагрузка, максимальное значение, закон распределения Пирсона типа I, закон распределения ординат, закон распределения амплитуд.

Анотація. Розглянуто нормування хвильових навантажень, що діють на корпус судна, з урахуванням скінченності їх максимальних значень. Отримано імовірнісний закон розподілу амплітуд цих навантажень у випадку, коли для ординат є чинним закон розподілу Пірсона типу I.

Ключові слова: нормативне хвильове навантаження, максимальне значення, закон розподілу Пірсона типу I, закон розподілу ординат, закон розподілу амплітуд.

Abstract. The determining of the wave loads standards for the ship taking into account the finitude of their maximum values is reviewed. The detection of distribution law of the wave loads amplitudes is reviewed for cases when the ordinates are distributed in accordance with the Pierson type I distribution law.

Keywords: wave load standard, maximum values, Pierson type I distribution law, ordinates distribution law, amplitudes distribution law.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Данная работа посвящена вопросам нормирования волновых нагрузок, возникающих при движении судна на интенсивном нерегулярном двумерном встречном волнении. Она продолжает исследование [16], в котором были рассмотрены закономерности формирования расчетных нагрузок в Правилах классификационных обществ применительно к высокоскоростным судам, включая суда с динамическими принципами поддержания и многокорпусные суда.

Предположим, что волновая нагрузка является линейной функцией высоты волны. Поскольку высоты волн на не слишком интенсивном нерегулярном волнении могут считаться подчиненными закону Рэлея, то и нагрузка M, если она является линейной функцией высоты волны, подчинена этому же закону. Если задана обеспеченность P_M нагрузки M, то отвечающая этой обеспеченности величина нагрузки, как известно, будет

$$M_P = \sqrt{-2\ln P_M D_M},$$

где D_M — дисперсия волновой нагрузки M.

Для нормирования нужно наибольшее возможное значение нагрузки $M = M_{\max}$. Однако из приведенного только что соотношения никак нельзя заключить, какой же будет ее максимально возможная величина. Нагрузка $M = M_P(P_M)$ зависит от обеспеченности P_M, а закон Рэлея, которому отвечает это соотношение, является асимптотическим. Это означает, что теоретически найденная по этой формуле величина M_P может быть сколько угодно большой, если только обеспеченность P_M достаточно мала. То же относится и к подчиненным закону Рэлея высотам и длинам волн.

Тогда при использовании распределения Рэлея для определения фактически возможного максимального значения нагрузки приходится на основании принципа практической уверенности вводить понятие уровня значимости — такой достаточно низкой расчетной обеспеченности $P_{M\min}$, что соответствующая квантиль случайной величины является максимально возможной.

На практике по данным натурных экспериментов определяется коэффициент $u_M = \sqrt{-\ln P_{M\min}} = \dfrac{M_{\max}}{\sqrt{2D_M}}$, где $M_{\max}$ — максимальная полученная в эксперименте величина нагрузки. Верхняя граница значений этого коэффициента принимается в качестве расчетной величины в Правилах по высокоскоростным судам классификационных обществ (в этих Правилах используется схема наиболее тяжелого режима, а не полновероятностная схема). Расчетные значения коэффициента u_M по разным Правилам оказываются близкими и для низкочастотных волновых нагрузок имеют порядок 2,3…2,4, что отвечает значениям $M_{\max} \approx (3{,}3...3{,}4)\sqrt{D_M}$ [16]. Но применение принципа практической уверенности содержит известный элемент субъективизма, и полной уверенности в том, что максимальная фактически возможная величина внешней нагрузки $M_{\max} \le (3{,}3...3{,}4)\sqrt{D_M}$, все же нет.

На самом деле, однако, существует вполне определенная величина максимальной нагрузки $M_{\max}$, которая в реальных условиях не может быть превзойдена даже на очень интенсивном волнении. Именно эта нагрузка (или близкое к ней, но несколько меньшее ее значение) и может быть включена в Правила по скоростным судам вместо $M_{\max} \approx (3{,}3...3{,}4)\sqrt{D_M}$. Такой подход мы считали бы более достоверным по сравнению с применением принципа практической уверенности.

Ограниченность величины $M_{\max}$ связана со следующими обстоятельствами:

на сильном волнении нагрузка M становится нелинейной функцией высоты волны, что ведет к ее снижению;

как высоты, так и длины реальных нерегулярных волн ограничены сверху;

соотношение между высотами и длинами волн (крутизна волнения) также дополнительно ограничено сверху.

Вообще же нормальный закон для ординат и, соответственно, закон Рэлея для амплитуд дают значительную погрешность при интенсивном волнении [17]. Следует также учитывать, что определение нормативных значений волновых нагрузок неразрывно связано с выбором и обоснованием коэффициентов запаса (коэффициентов безопасности). Поэтому этот вопрос также затронут ниже.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ДОСТИЖЕНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Для более обоснованного определения максимально возможных амплитуд волн и волновых нагрузок на практике используются такие приемы:

применение для описания случайных высот и длин волн модифицированного распределения Рэлея [17];

использование так называемых порядковых распределений (распределений Гумбеля), когда из реализации волнения (волновой нагрузки) выбирается совокупность максимальных значений и для этих значений строится новый закон распределения [3, 18];

применение для описания ординат волнения вместо нормального закона распределений Пирсона типа I [1, 11];

применение для описания ординат и амплитуд волнения усеченных нормального закона и закона Рэлея соответственно.

Однако все модифицированные распределения Рэлея остаются асимптотическими, со всеми проблемами в части субъективности выбора расчетной обеспеченности. То же относится и к порядковым распределениям максимальных значений.

Распределение Пирсона имеет то преимущество, что оно неасимптотическое и может содержать величину максимальной амплитуды r_{max} для волн (и такой же амплитуды M_{max} для волновых нагрузок) в качестве параметра распределения. При $r_{max} \to \infty$ ($M_{max} \to \infty$) это распределение переходит в нормальное распределение. Такими же свойствами обладает и усеченное нормальное распределение ординат волнения, а также усеченное распределение Рэлея для его амплитуд. Однако операция усечения ведет к деформации закона распределения при малых обеспеченностях, и применимость усеченного нормального распределения для описания ординат волн на концах распределения остается под вопросом. Это же относится и к усеченному распределению Рэлея для описания амплитуд волн. А применимость для той же цели распределения Пирсона была показана в работе [1] на основе непосредственного анализа реализации процесса морского волнения. В связи с этим именно данное направление исследований мы считаем перспективным.

ВЫДЕЛЕНИЕ НЕРЕШЕННЫХ ЧАСТЕЙ ОБЩЕЙ ПРОБЛЕМЫ

Распределение Пирсона относится к ординатам волнения, тогда как для наших целей необходимы амплитуды — как волнения, так и волновых нагрузок. Кроме того, если рекомендации в части определения максимальных высот h_{max} (амплитуд $r_{max} = 0{,}5h_{max}$) волн хорошо известны [2, 4, 8, 9, 12], то этого нельзя сказать в отношении определения амплитуд волновых нагрузок M_{max}.

Определение неасимптотического закона распределения амплитуд волн и такого же закона для волновых нагрузок, а также выбор и обоснование максимально возможной на интенсивном реальном волнении амплитуды волновой нагрузки представляет собой нерешенную пока часть общей проблемы нормирования общей прочности судов в Правилах классификационных обществ.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

В данной работе преследуется цель — разработка новых подходов к нормированию внешних волновых нагрузок для Правил классификационных обществ на основе применения неасиптотических распределений для ординат и амплитуд волн.

Для реализации этой цели необходимо:

построение закона распределения амплитуд волнения r в предположении, что ординаты волнения описываются кривыми Пирсона типа I и $r \le r_{max}$;

аналитическое определение максимально возможной величины волновой нагрузки M_{max} при движении судна на интенсивном встречном двумерном волнении;

построение закона распределения амплитуд нагрузки M в предположении, что всегда $M \le M_{max}$.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ

Плотность вероятности $\varphi_r(\bar{r})$ распределения Пирсона типа I для безразмерных ординат волнения $\bar{r} = r/r_{max}$, когда величины r_{max} и, соответственно, $\bar{r}$ конечны, имеет такой вид [1, 13]:

$$\varphi_r(\bar{r}) = C_{\varphi r}\left(1-\bar{r}^2\right)^{q_r}, \ |\bar{r}| \le 1;$$

$$\varphi_r(\bar{r}) = 0, \ |\bar{r}| > 1;$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_r(\bar{r})d\bar{r} = 1:\ C_{\varphi r} = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-\bar{r}^2)^{q_r}\,dr} =$$

$$= \frac{\Gamma(q_r+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(q_r+1)};$$

$$q_r = \frac{5K_r-9}{2(3-K_r)};\ \ K_r = \frac{3}{1+\frac{1}{u_r^2}};\ u_r = \frac{r_{max}}{\sqrt{2D_r}};$$

$$r_{max} = 0{,}5h_{max} \approx 1{,}4(1-0{,}5\varepsilon)h_{3max}^{0{,}8}$$
$$(r_{max} \text{ и } h_{3\,max} \text{ — в метрах}), \qquad (1)$$

где D_r — дисперсия волновых ординат; $h_{3\,max}$ — максимальная высота волны 3%-й обеспеченности для заданного водного бассейна за достаточно длительный (десятки лет) промежуток времени; $\Gamma(x)$ — гамма-функция от аргумента x; ε — безразмерная ширина спектра волнения.

Запись $x = y : C = z$ означает следующее. Из условия $x = y$ следует, что величина C должна быть равна z. Конкретно, из условия нормировки плотности вероятности ($x = \int_{-1}^{1} \varphi_r(\bar{r}) d\bar{r}$, $y = 1$) определяется значение нормирующего множителя $C = C_{\varphi r}$. Здесь используется справедливое при $(q+1)>0$ интегральное соотношение вида [5, с.183, формула (855.42)]

$$\int_0^1 u^m (1-u^n)^q \, du = \frac{\Gamma(q+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma\left(q+1+\frac{m+1}{n}\right)},$$

$$q+1,\ m+1,\ n>0$$

при $m = 0$, $n = 2$ и $q = q_r$.

Учтено, что $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$, а также то, что, в силу четности подынтегральной функции $\varphi(u) = (1-u^2)^q$, имеем

$$\int_{-1}^{1} (1-u^2)^q \, du = 2\int_0^1 (1-u^2)^q \, du.$$

Поскольку, как увидим далее, параметр K_r изменяется в диапазоне $1{,}5 \le K_r \le 3$, чему отвечает диапазон изменения параметра q_r вида $-0{,}5 \le q_r < +\infty$, условие [5] вида $q+1>0$ также выполняется.

Для установления зависимости вида $r_{\max} = r_{\max}(h_{3\max}, \varepsilon)$ в работах [2, 4] принят метод огибающей. Несмотря на некоторые различия в применении этого метода, результирующая зависимость вида $h_{\max} = h_{\max}(h_{3\max}) \approx (2{,}8...2{,}9)h_{3\max}^{0{,}8}$ ($h_{\max}$ и $h_{3\max}$ измеряются в метрах) для двумерного волнения при предельно узком спектре получается, по результатам указанных работ, практически идентичной. К близким результатам приводит при $h_{3\max}$ = 14...15 м и полученная другим способом линеаризованная зависимость из работы [8] вида $h_{\max} \approx 1{,}65 h_{3\max}$. Дополнительно по данным работы [2] можно приближенно учесть конечность ширины спектра, как показано выше, а по данным работы [4] – трехмерность волнения. В последнем случае наибольшая высота волны, измеряемая по генеральному направлению распространения волн, получается на 18 % больше, чем для чисто двумерного волнения.

По данным наблюдений в условиях Черного моря, $h_{3\max}$ = 12...14 м для северной и восточной его частей и $h_{3\max}$ = 8...9 м для юго-западной части за время 50…100 лет [9]. А для наиболее бурных районов Мирового океана эта же величина может достичь 20…22 м за 30 лет [12]. Если возможность применения спектрального разложения в условиях сильного волнения представ-ляется дискуссионной [17], то с некоторым запасом можно принимать $\varepsilon \approx 0$.

Величина K_r представляет собой отношение четвертого статистического момента распределения ординат волн к квадрату второго статистического момента этого распределения. Эта величина может быть определена при помощи анализа зафиксированных в эксперименте реализаций нерегулярного волнения (пример такого определения приведен в работе [1], оказалось, что $K_r \approx 2{,}46$). С другой стороны, если известна зависимость типа (1) вида $r_{\max} = r_{\max}(h_{3\max})$, то это также однозначно определяет величину K_r (поскольку расчетное значение дисперсии волновых ординат D_r в формулах для величин u_r и K_r в данном случае есть $D_r = D_{r\max} = 0{,}035 h_{3\max}^2$). А то или иное численное значение величины K_r имеет следующий смысл [1, 11]:

при $K_r = 3$ имеем нормальное распределение, чему отвечает $r_{\max} \to \infty$ и $q \to \infty$;

при $K_r = 1{,}5$ приходим к регулярному волнению, когда дисперсия амплитуд волнения $D_r = 0{,}5 r_{\max}^2$;

при $1{,}5 < K_r < 3{,}0$ имеем так называемое субгауссовское распределение.

Для определения вероятности опрокидывания судна в любой момент времени в течение его срока службы знание плотности вероятности безразмерных ординат волнения $\varphi_r(\bar{r})$ оказывалось достаточным [1]. Однако для нахождения экстремальных волновых нагрузок понадобятся плотность вероятности безразмерных амплитуд $f_r(\bar{r})$ и интегральное распределение безразмерных амплитуд $F_r(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} f_r(x) dx$ волнения.

Рассмотрим определение величин $f_r(\bar{r})$ и $F_r(\bar{r})$. Пусть плотность вероятности ординат морского волнения $\varphi_r(\bar{r})$ задана. Тогда для получения плотности вероятности амплитуд необходим закон распределения длины радиуса-вектора некоторой точки в полярной системе координат при условии, что координаты этой точки в двумерной декартовой системе не зависят друг от друга и распределены по заданному закону. Если в декартовой системе координат задан нормальный закон, то после преобразований и перехода к полярным координатам приходим к тому, что длина радиуса-вектора распределена по закону Рэлея. Полярный угол равномерно распределен в интервале от 0 до 2π. Применительно к нормальному закону распределения ординат морского волнения закон распределения длины радиуса-вектора отвечает закону распределения амплитуд волн.

Выполним аналогичные преобразования для данного случая. Пусть случайные декартовы координаты x, y некоторой точки на плоскости независимы друг от друга и распределены по закону Пирсона. Тогда совместный закон распределения этих координат $f_{xy}(x, y)$, очевидно, будет

$$f_{xy}(x,y) = C_{\varphi r}^2(1-x^2)^{q_r}(1-y^2)^{q_r}, \quad |x|\le 1, |y|\le 1;$$
$$f_{xy}(x,y) = 0, \quad |x|>1, |y|>1.$$

Перейдем к полярным координатам $\vec{R}-\Theta$, где $\vec{R}$, Θ — радиус-вектор и полярный угол соответственно, при этом $x=\vec{R}\cos\Theta$ и $y=\vec{R}\sin\Theta$. Тогда плотность вероятности полярных координат $f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta)$ будет [13]

$$f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta) = f_{xy}[x(\vec{R},\Theta), y(\vec{R},\Theta)]\cdot \det J,$$

где $\det J$ — определитель матрицы Якоби J.

В данном случае

$$J = \left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x(\vec{R},\Theta)}{\partial \vec{R}} & \dfrac{\partial x(\vec{R},\Theta)}{\partial \Theta} \\ \dfrac{\partial y(\vec{R},\Theta)}{\partial \vec{R}} & \dfrac{\partial y(\vec{R},\Theta)}{\partial \Theta}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\cos\Theta & -\vec{R}\sin\Theta \\ \sin\Theta & \vec{R}\cos\Theta\end{matrix}\right\|; \quad \det J = \vec{R}(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta) = \vec{R}.$$

Тогда

$$f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta) = C_{\varphi r}^2\vec{R}(1-\vec{R}^2\cos^2\Theta)^{q_r}(1-\vec{R}^2\sin^2\Theta)^{q_r}.$$

При таком виде распределения представить его в форме $f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta) = f_{\vec{R}}(\vec{R})f_{\Theta}(\Theta)$, где $f_{\vec{R}}(\vec{R})$ — маргинальное распределение радиуса-вектора, отождествляемое с искомым распределением амплитуд волн, не представляется возможным. Чтобы преодолеть это затруднение, учтем, что соотношение между законами распределения ординат и амплитуд волнения одно и то же во всей области определения аргумента $\bar{r}$. Связанные с этим закономерности, справедливость которых доказана при $\bar{r} \ll 1$, должны быть — в соответствии с методом математической индукции — справедливы во всей области определения аргумента $\bar{r}$. Поэтому воспользуемся приближенным соотношением

$$(1-x)^a \approx \exp(-ax), \; x \ll 1. \tag{2}$$

Здесь, как и в случае нормального распределения $f_{xy}(x, y)$, для полярного угла остается справедливым закон равномерного распределения в диапазоне от 0 до 2π. Тогда $f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta) = f_{\vec{R}}(\vec{R})f_{\Theta}(\Theta)$, причем $f_{\Theta}(\Theta)=\dfrac{1}{2\pi}$, и найдем

$$f_{\vec{R}\Theta}(\vec{R},\Theta) = \frac{f_{\vec{R}}(\vec{R})}{2\pi} = \frac{D_{\varphi r}}{2\pi}\vec{R}\cdot\exp\left[-q_r\vec{R}^2(\cos^2\Theta+\sin^2\Theta)\right] = \frac{D_{\varphi r}}{2\pi}\vec{R}\cdot\exp(-q_r\vec{R}^2);$$
$$D_{\varphi r} = \frac{1}{\int_0^1 x\exp(-q_r x^2)dx} = \frac{1}{2q_r}\left(1-\frac{1}{e}\right),$$

где $D_{\varphi r}$ — нормирующий множитель; $e = 2{,}78$ — основание натуральных логарифмов.

Далее применим соотношение (2) в обратном порядке, полагая $\exp(-ax) \approx (1-x)^a$, $x \ll 1$. Тогда мы сможем установить вид неасимптотической плотности вероятности $f_r(\bar{r})$ безразмерных амплитуд $\bar{r}$, отвечающий распределению ординат по закону Пирсона типа I:

$$f_r(\bar{r}) = C_{fr}\bar{r}(1-\bar{r}^2)^{q_r}, 0\le\bar{r}\le 1;$$
$$f_r(\bar{r}) = 0, \quad \bar{r}\le 0, \quad \bar{r}\ge 1;$$
$$\int_0^1 f_r(\bar{r})d\bar{r} = 1 : C_{fr} = \frac{1}{\int_0^1(1-\bar{r}^2)^{q_r}\bar{r}d\bar{r}}.$$

Интеграл в знаменателе вычисляется путем замены переменной:

$$\int_0^1 (1-x^2)^m x dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^m d(1-x^2) =$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^0 u^m du = \frac{1}{2(m+1)}.$$

Окончательно

$$f_r(\bar{r}) = C_{fr}\bar{r}(1-\bar{r}^2)^{q_r} \text{ при } 0 \le \bar{r} \le 1;$$

$$f_r(\bar{r}) = 0 \text{ при } \bar{r} \le 0, \bar{r} \ge 1;\ C_{fr} = 2(q_r+1). \quad (3)$$

Соответствующий интегральный закон распределения $F_r(\bar{r})$ и обеспеченность $P_r(\bar{r}) = 1 - F_r(\bar{r})$ будут:

$$F_r(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} f_r(x)dx = 1-(1-\bar{r}^2)^{q_r+1},$$

$$0 \le \bar{r} \le 1;\ F_r(\bar{r}) = 1,\ \bar{r} \ge 1;$$

$$P_r(\bar{r}) = (1-\bar{r}^2)^{q_r+1},\ 0 \le \bar{r} \le 1;\ P_r(\bar{r}) = 0,\ \bar{r} \ge 1.$$

Вновь используем приближенное соотношение (2). Тогда для $\bar{r} << 1$, чему соответствует $r_{\max} \to \infty$ (а в соотношении (2) — $x << 1$), можно записать

$$P_r(\bar{r}) = (1-\bar{r}^2)^{q_r+1} \approx \exp[-(q_r+1)\bar{r}^2].$$

Можно далее показать, что при $r_{\max} \to \infty$ имеем $\frac{r}{r_{\max}} \to \frac{\sqrt{D_r}}{r} = \frac{1}{u_r}$. Но тогда обеспеченность $P_r(\bar{r})$ при малых $\bar{r}$ можно, очевидно, представить и так:

$$r << r_{\max},\ \bar{r} = \frac{r}{r_{\max}}:\ P_r(\bar{r}) \approx \exp(-C_r u_r^2);$$

$$C_r \approx \frac{q_r+1}{u_r^2} \approx \frac{3(K_r-1)}{2K_r}.$$

Отсюда следует: при $K_r = 3$, а это соответствует нормальному распределению ординат, будем иметь $C_r \approx 1$, что и отвечает распределению амплитуд по закону Рэлея. Напомним, что точность приближенного равенства (2) тем выше, чем меньше x по сравнению с 1 или чем меньше r по сравнению с $r_{\max}$. А это согласуется с тем известным из океанографических наблюдений фактом, что точность описания амплитуд морского волнения законом Рэлея тем выше, чем меньше интенсивность волнения.

Далее от распределения безразмерных амплитуд волн $\bar{r}$ необходимо перейти к распределению безразмерных амплитуд волновых нагрузок $\overline{M} = M / M_{\max}$. Пусть зависимость $M = M(r)$ линейна во всем диапазоне $0 \le r \le r_{\max}$. Тогда величина $M_{\max} = M_{\max}^{(0)}$ будет зависеть от частоты ω экстремальной волны:

$$M_{\max}^{(0)} = M_{\max\omega}^{(0)}(\omega) = r_{\max} a_{M\max} |\Phi_M(\omega)|,$$

где $a_{M\max}$ — максимальная ордината амплитудно-частотной характеристики нагрузки M; $|\Phi_M(\omega)|$ — значение нормированного по максимальной ординате $a_{M\max}$ модуля передаточной функции нагрузки M при частоте ω.

На практике амплитудно-частотные характеристики (передаточные функции) для волновых нагрузок на корпус судна обычно имеют вид резонансных кривых с одним максимумом во всем частотном диапазоне (в данной работе рассматриваются только такие кривые). Тогда

$$\forall\omega \in (0,\infty): 0 \le |\Phi_M(\omega)| \le 1,$$

$$\omega = \omega_M : |\Phi_M(\omega_M)| = 1.$$

И если принять, что при $r = r_{\max}$ имеем $\omega = \omega_M$, то

$$M_{\max}^{(0)} = r_{\max} a_{M\max}. \quad (4а)$$

В этом случае плотность вероятности $f_M(\overline{M})$ амплитуд безразмерной нагрузки $\overline{M} = M / M_{\max} = M / M_{\max}^{(0)}$ можно принять по соотношению (3), заменив $\bar{r}$ на $\overline{M}$ и сохранив значение K_r. Дисперсия нагрузки M — величина D_M — предполагается известной. При этом будет выполнено условие

$$u_r = \frac{r_{\max}}{\sqrt{2D_r}} = u_M = \frac{M_{\max}}{\sqrt{2D_M}}. \quad (4б)$$

Но такая упрощенная оценка может привести к необоснованному завышению величины $M_{\max}$. Иными словами, фактически должно быть $\frac{M_{\max}}{\sqrt{D_M}} < \frac{r_{\max}}{\sqrt{D_r}}$. Объясняется это следующим. Во-первых, на интенсивном волнении будет нарушена линейность зависимости $M(r)$. Во-вторых, появление волны с длиной $\lambda_M \approx \frac{2\pi g}{\omega_M^2}$ и с амплитудой $r_{\max}$ может оказаться невозможным. Так, если $\frac{\lambda_M}{r_{\max}} < 14$, то такая волна оказывается чрезмерно крутой и разрушается. А фактически появиться может или волна с длиной λ_M, но с амплитудой $r_Ф = \dfrac{\lambda_M}{14} < r_{\max}$ (и это приведет к снижению величины $M_{\max}$), или с амплитудой $r_{\max}$, но с длиной $\lambda_ф = 14 r_{\max} > \lambda_M$ (и это также приведет к снижению величины $M_{\max}$).

Поэтому рассмотрим более точные методы для определения $M_{\max}$. Величину $M = M(r,\omega)$ при $0 \le r \le r_{\max}$ и $\forall \omega \in (0,\infty)$ будем искать в таком виде:

$$M(r,\omega) = \kappa_{НЛ}[\bar{\zeta}_j^*(r,\omega)] r a_{M\max} |\Phi_M(\omega)|; \quad (5)$$

$$\bar{\zeta}_j^*(r,\omega) = \frac{\zeta_j(r,\omega)}{l_{X\cdot j}},$$

где $\kappa_{НЛ}$ — поправка на нелинейность; $\zeta_j(r,\omega)$ — амплитуда относительных перемещений от продольной качки на j-м теоретическом шпангоуте; $l_{X\cdot j}$ — характерный вертикальный линейный размер (высота надводного борта или осадка) на j-м теоретическом шпангоуте.

Примем приближенно, что

$$\forall \omega \in (0,\infty): \kappa_{НЛ}(\omega) \approx \kappa_{НЛ}(\omega_M).$$

Зависимость вида $\kappa_{НЛ} = \kappa_{НЛ}[\zeta_j(r,\omega_M)] = \kappa_{НЛ}(r)$ при $\omega = \omega_M$ предполагается известной. При этом величина $\kappa_{НЛ}$ может зависеть также от местных особенностей формы обводов, от скорости хода и от иных параметров. Один из частных случаев определения $\kappa_{НЛ}$ рассмотрим ниже. Величина $\zeta_j(\omega_M)$ получается близкой к максимальной ординате амплитудно-частотной характеристики относительных перемещений. Расчетный номер теоретического шпангоута j определяется тем, что конкретно представляет собой нагрузка M. Тогда можно записать

$$M_{\max} = \max(M_{\max 1}, M_{\max 2}). \quad (6)$$

Здесь величины $M_{\max1}$ и $M_{\max2}$ связаны с ограничениями по высоте и по крутизне волны соответственно. Значение $M_{\max1}$ определяется при длине волны $\lambda = \lambda_M$, и при этом нам не требуется зависимость $M = M(\omega)$:

$$M_{\max 1} = \kappa_{НЛ}(r_{\max 1}) r_{\max 1} a_{M\max};$$

$$r_{\max 1} = \min\left(r_{\max}, \frac{\lambda_M}{14}\right).$$

Величина $r_{\max}$ находится по соотношению (1). Значение $M_{\max2}$ определяется при длине волны $\lambda = \lambda_{M\max} > \lambda_M$, где $\lambda_{M\max}$ есть та длина волны, для которой нагрузка M при максимальной крутизне волны достигает — без ограничения на высоту волны — максимального значения. Действительно, увеличив длину волны λ по сравнению с λ_M, мы в формуле (5) уменьшаем величину $|\Phi_M(\lambda)|$, $\lambda = 2\pi g/\omega^2$, но в то же время, в соответствии с введенным допущением, увеличиваем амплитуду волны максимальной крутизны $r = \lambda/14$. Получается

$$\lambda = \lambda_M : \frac{\partial |\Phi_M(\lambda)|}{\partial \lambda} = 0;$$

$$\lambda = \lambda_{M\max} : \frac{\partial M(\lambda)}{\partial \lambda} = C_1 \frac{\partial(\lambda \cdot |\Phi_M(\lambda)|)}{\partial \lambda} = 0,$$

$$C_1 \ne C_1(\lambda).$$

Для определения величины $M_{\max2}$ требуется зависимость $M = M(\omega)$. Пусть $|\bar{\Phi}_M(u)|$ или $|\bar{\Phi}_M(w)|$ есть модуль передаточной функции нагрузки M в дважды нормированной форме. Двойное нормирование выполняется не только по максимальному значению $a_{M\max}$, но и по длине волны λ_M или по частоте волны $\omega_M = \sqrt{\dfrac{2\pi \cdot g}{\lambda_M}}$. Здесь $u = \dfrac{\lambda}{\lambda_M}$; $w = \dfrac{\omega}{\omega_M}$, где λ, ω — длина и частота волны, отвечающие элементарной гармонике нерегулярного волнения, а g = 9,8 м/с^2 — ускорение свободного падения.

Предположим, что нагрузка M характеризуется нулевыми граничными условиями на концах интервалов по u и по w. В этом случае

$$|\bar{\Phi}_M(u)| : |\bar{\Phi}_M(0)| = 0, \ \lim_{u\to\infty} |\bar{\Phi}_M(u)| = 0;$$

$$|\bar{\Phi}_M(w)| : |\bar{\Phi}_M(0)| = 0, \ \lim_{w\to\infty} |\bar{\Phi}_M(w)| = 0.$$

Дважды нормированный модуль передаточной функции для таких нагрузок может быть удовлетворительно аппроксимирован следующим соотношением [7, 14, 15]:

$$|\bar{\Phi}_M(u,w)| = u^n \exp\left[-\frac{n}{2}(u^2 - 1)\right] =$$

$$= w^{-2n} \exp\left[-\frac{n}{2}(w^{-4} - 1)\right];$$

$$n : f_\lambda(n) = \int_0^\infty |\bar{\Phi}_M(u)| du = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{n}{2}\right)}{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}};$$

$$n:F_\lambda(n)=\int\limits_0^\infty\left|\overline{\Phi}_M(u)\right|^2du=\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\exp(n)}{2n^{n+\frac{1}{2}}}. \quad (7)$$

$$n:f_\omega(n)=\int\limits_0^\infty\left|\overline{\Phi}_M(w)\right|dw=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\exp\left(\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}};$$

$$n:F_\omega(n)=\int\limits_0^\infty\left|\overline{\Phi}_M(w)\right|^2dw=\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{4}\right)\exp(n)}{n^{n-\frac{1}{4}}}.$$

Здесь одна из величин, на основе которой последовательными приближениями определяется коэффициент n (это величины f_λ, f_ω, F_λ или F_ω), предполагается известной по данным экспериментов. Дисперсия D_M для нагрузки M, передаточная функция которой задана соотношением (7), определится по соотношениям работы [14]:

$$\sqrt{\frac{D_M}{D_r}}=5{,}3a_{M\max}U_\tau; \quad (8)$$

$$U_\tau\approx\frac{1}{10a}\sqrt{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\overline{\omega}_M^{4n}\exp(n)\Gamma(n+1)}{\left(n\overline{\omega}_M^4+\frac{0{,}177}{a^2}\right)^{n+1}}};$$

$$a=\frac{2}{\pi\cdot\overline{\omega}_c^2};\ \overline{\omega}_c=\frac{\omega_c}{\omega_L};\ \overline{\omega}_M=\frac{\omega_M}{\omega_L};\ \omega_L=\sqrt{\frac{2\pi\cdot g}{L}},$$

где L — длина судна; ω_c — средняя частота волнения; U_τ — функция, введенная в 1966 году В. В. Козляковым [12].

Далее несложно показать, что на основе соотношения (7) имеем

$$\lambda_{M\max}=\lambda_M\sqrt{1+\frac{1}{n}}. \quad (9)$$

Искомая нагрузка в этом случае будет

$$M_{\max 2}=M\left(\lambda=\lambda_{M\max},r\le\frac{\lambda_{M\max}}{14}\right)=$$

$$=\kappa_{\text{НЛ}}(\omega_M)\kappa_r\frac{\lambda_M}{14}\frac{a_{M\max}}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)};$$

$$\kappa_r=\frac{\lambda_{M\max}}{14r_{\max}}\le 1.$$

Рассмотрим далее случай, когда под нагрузкой M понимаются относительные перемещения от продольной качки ζ, $M=\zeta$ и $a_{M\max}=a_{\zeta\max}$ (номер теоретического шпангоута j пока опускается). Относительные перемещения заданной обеспеченности, а также скорости относительных перемещений входят в расчетные зависимости для высокочастотных волновых нагрузок, а также используются в расчетах заливания. На основе неасимптотических распределений относительных перемещений и их скоростей для таких нагрузок также могут быть составлены неасимптотические распределения, но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Для относительных перемещений одно из граничных условий (на коротких волнах) ненулевое и система граничных условий имеет вид

$$\left|\overline{\Phi}_\zeta(u)\right|:\left|\overline{\Phi}_\zeta(0)\right|=\frac{1}{a_{\zeta\max}},\ \lim_{u\to\infty}\left|\overline{\Phi}_\zeta(u)\right|=0;$$

$$\left|\overline{\Phi}_\zeta(w)\right|:\left|\overline{\Phi}_\zeta(0)\right|=0,\ \lim_{w\to\infty}\left|\overline{\Phi}_\zeta(w)\right|=\frac{1}{a_{\zeta\max}}.$$

Применение формул (7)–(9) в этом случае, строго говоря, незаконно. Расчетные зависимости для величин $\left|\overline{\Phi}_M(u)\right|=\left|\overline{\Phi}_\zeta(u)\right|$ и $D_M=D_\zeta$ с учетом ненулевого граничного условия на коротких волнах были рассмотрены в работе [15]. Но поскольку зависимость $\left|\overline{\Phi}_\zeta(u)\right|$ нам здесь интересна только в окрестности достаточно удаленной от коротковолнового диапазона области резонанса (где $\left|\overline{\Phi}_\zeta(1)\right|=1$), то в первом приближении и в этом случае можно применять соотношение (9). Однако входящую в него величину n приходится искать уже по статистической формуле [14], когда для $j=0,1,2,3$:

$$n=n_{\zeta\cdot j}\approx 1{,}4(a_{\zeta\max j}-1).$$

Соотношение (8) при таком определении коэффициента $n_{\zeta\cdot j}$ также приближенно справедливо, если только $a_{\zeta\max j}>3$. В противном случае для поиска величин $n=n_{\zeta\cdot j}$ и $D_M=D_{\zeta\cdot j}$ следует использовать зависимости из нашей работы [15]. Отметим также, что если рассматривается задача расчета заливания и бортового слеминга, когда $j=1$, $M=\zeta_1$, $\omega_M=\omega_\zeta$, $\overline{\zeta}_1^*=\dfrac{\zeta_1(r,\omega_\zeta)}{H_{f1}}=\dfrac{ra_{\zeta\max 1}}{H_{f1}}$, где H_{f1} — высота надводного борта на первом теоретическом шпангоуте, то имеем [10]

$$\kappa_{НЛ}(\bar{\zeta}_1^*) \approx 1 - C_2(\bar{\zeta}_1^*)^2,\ C_2 \neq C_2(\bar{\zeta}_1^*),$$

где коэффициент C_2 определяется на основе «Методики» [10].

Плотности вероятности ординат $\varphi_M(\overline{M})$ и амплитуд $f_M(\overline{M})$ безразмерной нагрузки $\overline{M} = M / M_{\max}$ по аналогии с соотношением (3) будут:

$$\varphi_M(\overline{M}) = C_{\varphi M}\left(1-\overline{M}^2\right)^{q_M} \text{ при } \left|\overline{M}\right| \leq 1;$$

$$\varphi_M(\overline{M}) = 0 \text{ при } \left|\overline{M}\right| \geq 1;$$

$$\int_{-1}^{1}\varphi_M(\overline{M})d\overline{M} = 1:\ C_{\varphi M} = \frac{\Gamma(q_M+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\Gamma(q_M+1)};$$

$$f_M(\overline{M}) = C_{fM}\overline{M}(1-\overline{M}^2)^{q_M},\ 0 \leq \overline{M} \leq 1;$$

$$f_M(\overline{M}) = 0,\ \overline{M} \leq 0 \text{ или } \overline{M} \geq 1;$$

$$\int_0^1 f_M(\overline{M})d\overline{M} = 1: C_{fM} = 2(q_M+1);$$

$$q_M = \frac{5K_M - 9}{2(3-K_M)};\ K_M = \frac{3}{1+\frac{1}{u_M^2}};\ u_M = \frac{M_{\max}}{\sqrt{2D_M}}.$$

Соответствующий интегральный закон распределения $F_M(\overline{M})$ и обеспеченность $P_M(\overline{M}) = 1 - F_M(\overline{M})$ будут:

$$F_M(\overline{M}) = \int_0^{\overline{M}} f_M(x)dx = 1-(1-\overline{M}^2)^{q_M+1},$$

$$0 \leq \overline{M} \leq 1;\ \ F_M(\overline{M}) = 1,\ \overline{M} \geq 1;$$

$$P_M(\overline{M}) = (1-\overline{M}^2)^{q_M+1},\ 0 \leq \overline{M} \leq 1;$$

$$P_M(\overline{M}) = 0,\ \overline{M} \geq 1.$$

Тогда, найдя по соотношению (6) величину $M_{\max}$ и по (8) — дисперсию D_M, можем по приведенным зависимостям последовательно рассчитать величины u_M, K_M и q_M, а затем и плотность вероятности $f_M(\overline{M})$. В этом случае безразмерная нагрузка $\overline{M}_P = M_P / M_{\max}$, обеспеченность которой есть P_M, определится из соотношения $\int_{\overline{M}_P}^{1} f_M(\overline{M})d\overline{M} = P_M$.

Распределения амплитуд волнения (3) и амплитуд нагрузки (10), а также параметры этих распределений соотносятся так. Если $K_r = 3$, то и $K_M = 3$. В этом случае распределения амплитуд (3) и (10) переходят в распределения Рэлея, а соответствующие распределения ординат, как волн, так и нагрузок, в нормальные распределения. Если $1{,}5 < K_r < 3$, то и $1{,}5 < K_M < 3$. Но при этом $K_r = K_M$ только тогда, когда максимальная нагрузка $M_{\max}$ определяется по приближенному соотношению (4а) в предположении справедливости соотношения (4б). В таком случае величина K_M (как и K_r) определяется исключительно характеристиками волнения. Но если для нахождения $M_{\max}$ применяется более точное соотношение (6), тогда $K_r \neq K_M$. В этом случае величина K_r по-прежнему определяется только характеристиками волнения, а величина K_M — еще и главными элементами проектируемого судна.

Рассмотрим далее результаты предварительных расчетов и некоторые аспекты практического использования предложенных выше зависимостей в задаче нормирования внешних волновых нагрузок, действующих на скоростные суда.

Как отмечалось выше, заложенные в различные национальные Правила по скоростным судам нормативные значения волновых нагрузок $M_Н$ предполагаются близкими к максимально возможным их значениям $M_{\max}$ с учетом возможного ограничения района плавания [6] и, по данным модельных и натурных экспериментов, принимаются в форме $M_Н \approx (3{,}3...3{,}4)\sqrt{D_M}$ (всюду рассматривается стационарный волновой режим). Это отвечает или 0,5%-й обеспеченности (российские Правила), или средним значениям из 100 максимальных (ряд европейских Правил) [16]. Предположим пока, что район плавания не ограничен, вернемся к формуле (4б) и учтем, что в соответствии с линеаризованным соотношением О.Е. Литонова [8] $r_{\max} \approx 1{,}65 r_{3\max}$. Тогда, поскольку $r_{3\max} = 0{,}5h_{3\max} = \sqrt{-2\ln 0{,}03 \cdot D_r} \approx 2{,}65\sqrt{D_r}$, $r_{\max} \approx 4{,}37\sqrt{D_r}$. Это означает, что в соответствии с формулой (4б) в Правилах следовало бы принять

$$M_P = M_{\max} \approx (4{,}3...4{,}4)\sqrt{D_{M\max}},$$

где $D_{M\max} = D_M(r_{3\max})$.

Но это — завышенный результат, а причины завышения определенных по соотношению (4а) максимальных значений внешних волновых нагрузок мы подробно обсудили выше. По данным модельных и натурных экспериментов, указанное завышение составляет примерно 25…30 %. Соответствующая корректировка и приводит к соотношению $M_{\text{Н}} \approx (3{,}3...3{,}4)\sqrt{D_M}$ [6]. Однако, полностью признавая необходимость опоры на эксперимент в задачах нормирования, отметим все же, что ни один эксперимент не обладает всеобщностью. А отсюда вытекает необходимость разработки и использования теории, которая должна в разумной степени согласовываться с экспериментом при одних и тех же исходных данных.

Развитый в данной работе подход позволяет теоретически найти на основе соотношения (6) откорректированное по сравнению с (4а) максимальное значение волновой нагрузки $M_{\max}$ независимо от дисперсии D_M. Затем, зная найденную по формуле (8) дисперсию, можно вычислить и параметр $\sqrt{2}u_M = \dfrac{M_{\max}}{\sqrt{D_M}} = \dfrac{M_{\text{Н}}}{\sqrt{D_M}}$.

Кроме того, в зависимости для нормативных характеристик поперечных сечений (например, для моментов сопротивления) наряду с нормативной нагрузкой $M_{\text{Н}}$ обязательно входит и коэффициент безопасности $K_W \geq 1$. Общая зависимость для этого коэффициента при некоторых упрощающих допущениях имеет вид [3]

$$K_W = \frac{M_P(P_M[Q])}{M_P(P_M)}, \tag{11}$$

где $[Q] = 10^{-3}...10^{-4}$ — нормативная вероятность разрушения (отказа) [3].

Если справедлив закон Рэлея и $M_P(P_M) = \sqrt{-2D_M \ln P_M}$, то

$$K_W = \sqrt{\frac{\ln(P_M[Q])}{\ln P_M}} = \sqrt{1 + \frac{\ln[Q]}{\ln P_M}}.$$

Если справедливо предложенное здесь распределение (10), то

$$K_W = \sqrt{\frac{1-(P_M[Q])^{\frac{1}{q_M+1}}}{1-P_M^{\frac{1}{q_M+1}}}}. \tag{12}$$

При использовании закона Рэлея всегда $P_M(M_{\text{Н}}) = \exp\left(-\dfrac{M_{\text{Н}}^2}{2D_M}\right) > 0$ и, следовательно, всегда (при любых значениях $M_{\text{Н}}$) имеем $K_W = K_W([Q]) > 1$. А при использовании распределения (10) это имеет место только при $M_{\text{Н}} < M_{\max}$. При $M_{\text{Н}} \geq M_{\max}$ будет $P_M(M_{\text{Н}}) = 0$ и $K_W \neq K_W([Q]) = 1$.

Пусть теперь в соотношении (12) имеем $q_M \to \infty$. В этом случае распределение (10) переходит в распределение Рэлея, а в соотношении (12) при $M_{\text{Н}} < M_{\max}$ и $P_M(M_{\text{Н}}) > 0$ получается неопределенность вида 0/0. Если раскрыть эту неопределенность по правилу Лопиталя, а затем использовать известное разложение натурального логарифма в степенной ряд, то можно прийти к соотношению (11). Это соотношение также отвечает распределению Рэлея.

Таким образом, условию $M_{\text{Н}} = M_{\max}$ в соответствии с соотношениями (10) и (12) отвечает нулевая вероятность превышения и единичный коэффициент безопасности по волновой нагрузке K_W. В итоге получаются весьма простые зависимости, которые, однако, не позволяют учесть ограничения по району плавания. Выполненные предварительные расчеты показывают, что теоретическое значение параметра $\sqrt{2}u_M$ может быть как несколько выше, так и несколько ниже нормативного значения 3,3…3,4 (на 10…12 %, иногда — до 20 %). Здесь существенно влияние параметров $\kappa_{\text{нл}}$ и $\tilde{\omega}_M = \dfrac{\overline{\omega}_M}{\overline{\omega}_c} = \dfrac{\omega_M}{\omega_c}$, менее существенно — коэффициента n, который определяет форму амплитудно-частотной характеристики волновой нагрузки.

Возможен при нормировании и иной подход. В этом случае $M_{\text{Н}} < M_{\max}$, величина $M_{\text{Н}}$ характеризуется некоторой отличной от 0 вероятностью превышения, которая может быть определена на основе распределения (10). Здесь в расчетные зависимости вводится найденный по (12) коэффициент безопасности K_W. Отличие результатов расчетов по распределению (10) и по распределению Рэлея тем больше, чем ближе $M_{\text{Н}}$ к $M_{\max}$.

В этом случае возможно введение ограничений по району плавания, и тогда отличие результатов расчетов по распределению (10) и по распределению Рэлея тем меньше, чем жестче указанные ограничения (чем меньше предельная высота волны, при которой допускается плавание судна). Коэффициент безопасности K_W в этом случае больше 1.

ВЫВОДЫ

1. Для построения законов распределения экстремальных низкочастотных волновых нагрузок представляется целесообразным применение неасимптотических распределений, одним из параметров которых является максимальная величина нагрузки M_{max}. 2. Для закона распределения ординат волнения и нагрузок целесообразно применять распределение Пирсона типа I, а для амплитуд волнения и нагрузок — распределение, которое предложено в данной работе (соотношения (3) и (10)). 3. Все сказанное относится и к построению неасимптотических законов распределения относительных перемещений и скоростей относительных перемещений от продольной качки. Со временем на этой основе могут быть построены неасимптотические законы распределения также и для высокочастотных волновых нагрузок. 4. Применение неасимптотических распределений позволит в перспективе построить более логичную и совершенную схему нормирования прочности для Правил классификационных обществ. Эта схема наряду с экспериментом получит и достаточно строгое теоретическое обоснование. 5. Выполненные предварительные расчеты позволяют уточнить для выбранных исходных данных принятые в ряде Правил по скоростным судам значения внешних волновых нагрузок (или соотношения между этими волновыми нагрузками и их дисперсиями), а также принятые в этих Правилах значения коэффициентов безопасности по волновым нагрузкам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Алешин, И. К.* Влияние ограниченности реальных случайных процессов волнения и ветра на вероятностные характеристики качки и устойчивости судов в условиях шторма [Текст] / И. К. Алешин // Малотоннажное судостроение: сб. науч. трудов. — Николаев : НКИ, 1988. — С. 80–89.

[2] *Ананьев, Д. М.* О наибольшей высоте двумерного нерегулярного волнения [Текст] / Д. М. Ананьев // Обеспечение мореходных качеств судов при проектировании: сб. науч. трудов КТИРПиХ. — Калининград : КТИРПиХ, 1985. — С. 18–24.

[3] *Бойцов, Г. В.* Прочность и конструкция корпуса судов новых типов [Текст] : монография / Г. В. Бойцов, О. М. Палий. — Л. : Судостроение, 1979. — 360 с.

[4] *Бородай, И. К.* Оценка наибольших высот волн и амплитуд качки в условиях нерегулярного волнения [Текст] / И. К. Бородай // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. — Л. : Судостроение, 1970. — Вып. 259. — С. 74–84.

[5] *Двайт, Г. Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы [Текст] : справочник / Г. Б. Двайт. — М. : Наука, 1977. — 224 с.

[6] *Кузовенков, Б. П.* Определение расчетного изгибающего момента при проверке общей прочности корпуса СПК [Текст] / Б. П. Кузовенков // Вопросы судостроения, сер. Проектирование судов. — Л. : ЦНИИ «Румб», 1983. — Вып. 34. — С. 3–13.

[7] *Литонов, О. Е.* Некоторые аспекты нахождения долговременных распределений напряжений в конструкциях двухкорпусных судов [Текст] / О. Е. Литонов // Многокорпусные суда. — Л. : Судостроение, 1978. — С. 153–165.

[8] *Литонов, О. Е.* Расчетная волна и прочность конструкций СПБУ [Текст] / О. Е. Литонов // Науч.-техн. сборник Регистра СССР. — М. : Внешторгиздат, 1991. — Вып. 17. — С. 95–100.

[9] *Лопатухин, Л. И.* Режимные характеристики волнения на морях [Текст] / Л. И. Лопатухин // Науч.-техн. сборник Регистра СССР. — Л. : Транспорт, 1986. — Вып. 16. — С. 77–89.

[10] Методика определения изгибающего момента при ударе волн в развал бортов [Текст] // Сб. нормативно-методических материалов Регистра СССР. — М. : Мортехинформреклама, 1986. — Кн. 4. — С. 7–19.

[11] *Некрасов, В. А.* Устойчивость нелинейной бортовой качки судна на регулярном и нерегулярном волнении [Текст] / В. А. Некрасов // Гидродинамика корабля: сб. науч. трудов. — Николаев : НКИ, 1989. — С. 24–37.

[12] *Путов, Н. Е.* Проектирование конструкций корпуса морских судов [Текст] : учеб. / Н. Е. Путов. — Л.: Судостроение, 1977. — Ч. 2. — 424 с.

[13] Сб. задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций [Текст] / под ред. А. А. Свешникова. — М. : Наука, 1970. — 656 с.

[14] *Соломенцев, О. И.* Определение статистических характеристик относительных перемещений двухкорпусного судна на встречном волнении [Текст] / О. И. Соломенцев // Автоматизированное проектирование и конструкции судов: сб. науч. трудов. — Николаев : НКИ, 1986. — С. 58–72.

[15] *Соломенцев, О. И.* О форме аппроксимирующей зависимости для модуля передаточной функции относительных перемещений при продольной качке судов на встречном волнении [Текст] / О. И. Соломенцев // Программные и аппаратные средства вычислительной техники и автоматизированных систем: сб. науч. трудов. — Николаев : НКИ, 1992. — С. 31–43.

[16] *Соломенцев, О. И.* Анализ волновых нагрузок в Правилах по скоростным судам ряда классификационных обществ [Текст] / О. И. Соломенцев // зб. наук. праць НУК. — Миколаїв : НУК, 2009. — № 5 (428). — С. 18–27.

[17] *Суслов, В. П.* О вероятностно-детерминированном методе определения нагрузок, действующих на суда [Текст] / В. П. Суслов, С. В. Суслов // зб. наук. праць УДМТУ. — Миколаїв : УДМТУ, 1998. — № 5 (353). — С. 44–55.

[18] *Mansour, A. E.* Methods of Computing the Probability of Failure Under Extreme Values of Bending Moment [Text] / A. E. Mansour // Journal of Ship Research. — 1972. — Vol. 16, nr 2. — P. 113–123.