УДК 629.5:624.074 + 519.688
М 69

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАСЧЕТОВ БАЛОК НА НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРОВАННОМ СПЛОШНОМ ОСНОВАНИИ

И.Л. Михелев, канд. техн. наук

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. Приведена математическая модель, разработаны алгоритм и ЭВМ-программа для расчета изгиба балок на сплошном нелинейно деформированном основании. Проведен анализ сходимости указанной математической модели и выполнены числовые расчеты компонентов напряженно-деформированного состояния балки в упруго-пластической стадии.

Ключевые слова: балка, напряженно-деформированное состояние, упругопластические деформации, нелинейно деформированное основание, численные методы анализа, алгоритмы расчета, ЭВМ-программа.

Анотація. Наведено математичну модель, розроблені алгоритм та ЕОМ-програма для розрахунку згину балок на суцільній нелінійно деформованій основі. Проведено аналіз збіжності зазначеної математичної моделі та виконані числові розрахунки компонентів напружено-деформованого стану балки в пружно-пластичній стадії.

Ключові слова: балка, напружено-деформований стан, пружно-пластичні деформації, нелінійно деформована основа, числові методи аналізу, алгоритми розрахунку, ЕОМ-програма.

Abstract. A mathematical model is given, the algorithm and the software program for calculating of beams bending on a nonlinearly-strained solid base are developed. The analysis of the given mathematical model convergence is completed and the numerical computation of the components of the stress-strained state of a beam in the elastic-plastic phase.

Keywords: beam, stress-strain state, elastic-plastic deformations, nonlinearly-strained solid base, numerical analysis techniques, algorithms for calculating, computer program.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При деформировании конструкций физическая нелинейность, связанная с отступлениями от закона Гука, проявляется, как правило, раньше, чем геометрическая нелинейность, если последняя априори не учитывается в математической модели. Поэтому расчетам кон-струкций и их элементов в упругопластической стадии деформирования уделяется в строительной механике большое внимание.

Задачи упругопластического деформирования с математической точки зрения довольно сложны вследствие их физической нелинейности, поэтому они различными способами сводятся к совокупности линейных.

Основными методами линеаризации физически нелинейных задач теории упругости являются: метод упругих решений; метод переменных параметров упругости; метод последовательного нагружения, или шаговый метод.

В любом из указанных выше общих методов решения нелинейных краевых задач приходится рассматривать соответствующие линейные задачи, получить точные аналитические решения которых, как правило, довольно сложно или вовсе невозможно. Кроме того, в таких задачах некоторые исходные данные часто не задаются аналитическими выражениями, что приводит к необходимости использовать численные методы математического анализа, практическая реализация которых для массовых расчетов невозможна без применения ЭВМ.

ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Цель данной статьи — используя математическую модель изгиба балок на сплошном нелинейно деформированном основании, разработать алгоритм для практической реализации на ЭВМ расчетов соответствующих балок на основе метода конечных разностей.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

При постановке судов в док и продольном спуске на воду определение реакций опорных конструкций дока или стапеля, а также проблемы рационального регулирования этих реакций сводятся к расчету балки на сплошном нелинейно деформируемом основании.

В рамках комплексной научно-исследовательской работы «Разработка методов исследований и расчета нелинейных вероятностных квазистатических и динамических нагрузок и деформаций корпусов судов в экстремальных штормовых условиях» профессором Ю. П. Кочановым были проанализированы и обобщены основные результаты работ [1, 2, 4, 5] и создана математическая модель изгиба указанной упругопластической балки. Искомой функцией в рамках этой математической модели является прогиб, который определяется дифферен-циальным уравнением

$$\left[EI(x)w''\right]'' + k(x, w)w = q(x), \qquad (1)$$

где $q(x)$ — интенсивность поперечной нагрузки; $EI(x)$ — изгибная жесткость поперечного сечения балки с абсциссой x; $k(x, w)$ — погонный коэффициент жесткости основания; $0 \le x \le l$; l — длина балки; $w = w(x)$ — прогиб балки.

Уравнение (1) описывает изгиб балки в координатной плоскости xOz, расчетная схема ее изображена на рис. 1.

В указанных выше ситуациях постановки в док и продольном спуске корпус судна рассматривается как балка, а опорные конструкции — как деформируемое основание. При этом граничные условия задаются в усилиях и имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned} &EI(0)w''(0) = M_1; \ \left[\left(EI(x)w''\right)'\right]_{x=0} = P_1; \\ &EI(l)w''(l) = M_2; \ \left[\left(EI(x)w''\right)'\right]_{x=l} = -P_2, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где использовано общепринятое в строительной механике корабля правило знаков; M_1, M_2 — изгибающие моменты в торцевых сечениях; P_1, P_2 — сосредоточенные силы в тех же сечениях (см. рис. 1).

При постановке судна в док и спуске на воду концевые усилия P_i, M_i создаются силами тяжести оконечностей судна за пределом опорных конструкций. Как правило, в опорных конструкциях предусматривается деревянная подушка, которая до некоторого уровня нагрузки (обжатия) деформируется

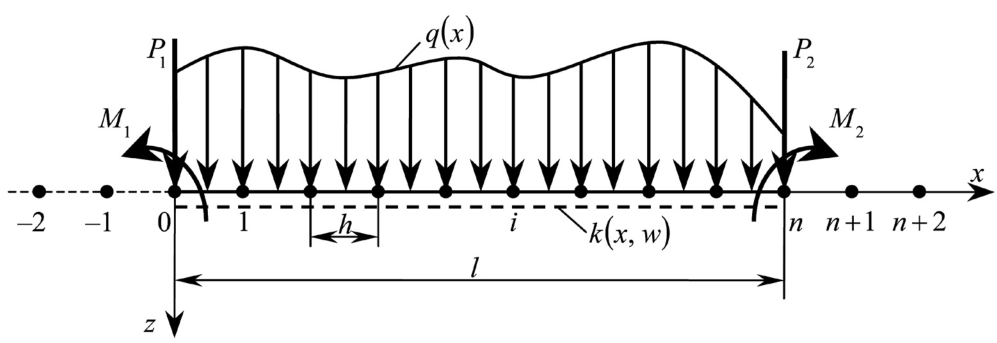

Рис. 1. Расчетная схема балки на нелинейно деформируемом сплошном основании

упруго, а при повышении нагрузки — идеально пластично. Поэтому при расчетах принимается следующий закон деформирования опорного основания:

$$k(x, w) = \begin{cases} k(x), \ 0 \le r < r_T; \\ r_T / w, \ r \ge r_T, \end{cases} \tag{3}$$

где r_T — интенсивность реакций основания, при которой начинается текучесть сминающихся прокладок.

Решение нелинейной краевой задачи (1), (2) при заданном законе деформирования основания (3) позволяет определить реакции основания, необходимые для расчета прочности опорных конструкций как судна, так и основания:

$$r(x) = k(x, w) w(x).$$

Принимая за неизвестные прогибы w_i и располагая узлы в соответствии с рис. 1, с учетом центральных конечно-разностных формул второго порядка точности для функции одного аргумента $w = w(x)$ [6] получим конечно-разностные уравнения для дифференциального уравнения (1)

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{i+1} w_{i+2} - 2(\lambda_{i+1} + \lambda_i) w_{i+1} + \\ &+ (\lambda_{i+1} + 4\lambda_i + \lambda_{i-1} + \gamma_i) w_i - \\ &- 2(\lambda_i + \lambda_{i-1}) w_{i-1} + \lambda_{i-1} w_{i-2} = R_i; \\ &i = 0, 1, 3, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $\gamma_i = \dfrac{k(x_i, w_i) h^4}{EI_*}$; $\lambda_i = \dfrac{EI_i}{EI_*}$; $R_i = \dfrac{q(x_i) h^4}{EI_*}$; EI_* — эталонное, не равное нулю значение $EI(x)$, которое принимается в пределах заданных значений изгибной жесткости.

Граничные условия (2) в конечно-разностной форме имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_0 (w_1 - 2 w_0 + w_{-1}) = \frac{M_1 h^2}{EI_*}; \\ &\lambda_1 w_2 - 2\lambda_1 w_1 + (\lambda_1 - \lambda_{-1}) w_0 + 2\lambda_{-1} w_{-1} - \\ &- \lambda_{-1} w_{-2} = \frac{2 P_1 h^3}{EI_*}; \\ &\lambda_n (w_{n+1} - 2 w_n + w_{n-1}) = \frac{M_2 h^2}{EI_*}; \\ &\lambda_{n+1} w_{n+2} - 2\lambda_{n+1} w_{n+1} + (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1}) w_n + \\ &+ 2\lambda_{n-1} w_{n-1} - \lambda_{n-1} w_{n-2} = -\frac{2 P_2 h^3}{EI_*}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Совместное решение уравнений (4), (5) позволяет найти прогибы w_i во всех базовых точках по длине балки, включая законтурные.

Поскольку коэффициенты γ_i, входящие в (4), нелинейно зависят от прогиба, расчет выполняется методом последовательных приближений по следующему алгоритму.

После формирования исходных данных в нулевом приближении принимается независимость коэффициента жесткости основания (3) от прогиба балки и решается система линейных алгебраических уравнений (4), (5) $(n+5)$-го порядка методом Гаусса с частичным упорядочением по строкам [3]. Для формирования коэффициентов при неизвестных этой системы аналогично [6] полагается $\lambda_{-1} = \lambda_0$; $\lambda_{n+1} = \lambda_n$.

Во втором приближении, с учетом заданного закона изменения по длине балки, уточняется коэффициент жесткости упругопластического основания в узлах, где $r_i \ge r_T$, и вновь решается система (4), (5) с уточненными коэффициентами γ_i.

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $\left| \max\left|w_i^{Kol}\right| - \max\left|w_i^{Kol-1}\right| \right| \le \varepsilon$, где ε — заданная абсолютная погрешность.

На заключительном этапе расчета определяются изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$\left.\begin{aligned} &M_i = \frac{EI_*}{h^2} (w_{i+1} - 2 w_i + w_{i-1}) \lambda_i; \\ &N_i = \frac{EI_*}{2h^3} \begin{bmatrix} \lambda_{i+1} w_{i+2} - 2\lambda_{i+1} w_{i+1} + \\ + (\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1}) w_i + 2\lambda_{i-1} w_{i-1} - \\ - \lambda_{i-1} w_{i-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\}$$

Последовательность указанных вычислений более детально иллюстрирует структурно-логическая блок-схема, представленная на рис. 2.

По разработанному алгоритму составлена ПЭВМ-программа для исследовательских расчетов прочности судовых конструкций, физической моделью которых является балка на сплошном основании.

В программе предусмотрена вариация значения шага h для базовых точек и числа итераций Kol при учете пластических деформаций. Величина шага определяется размером пластических участков и выбирается

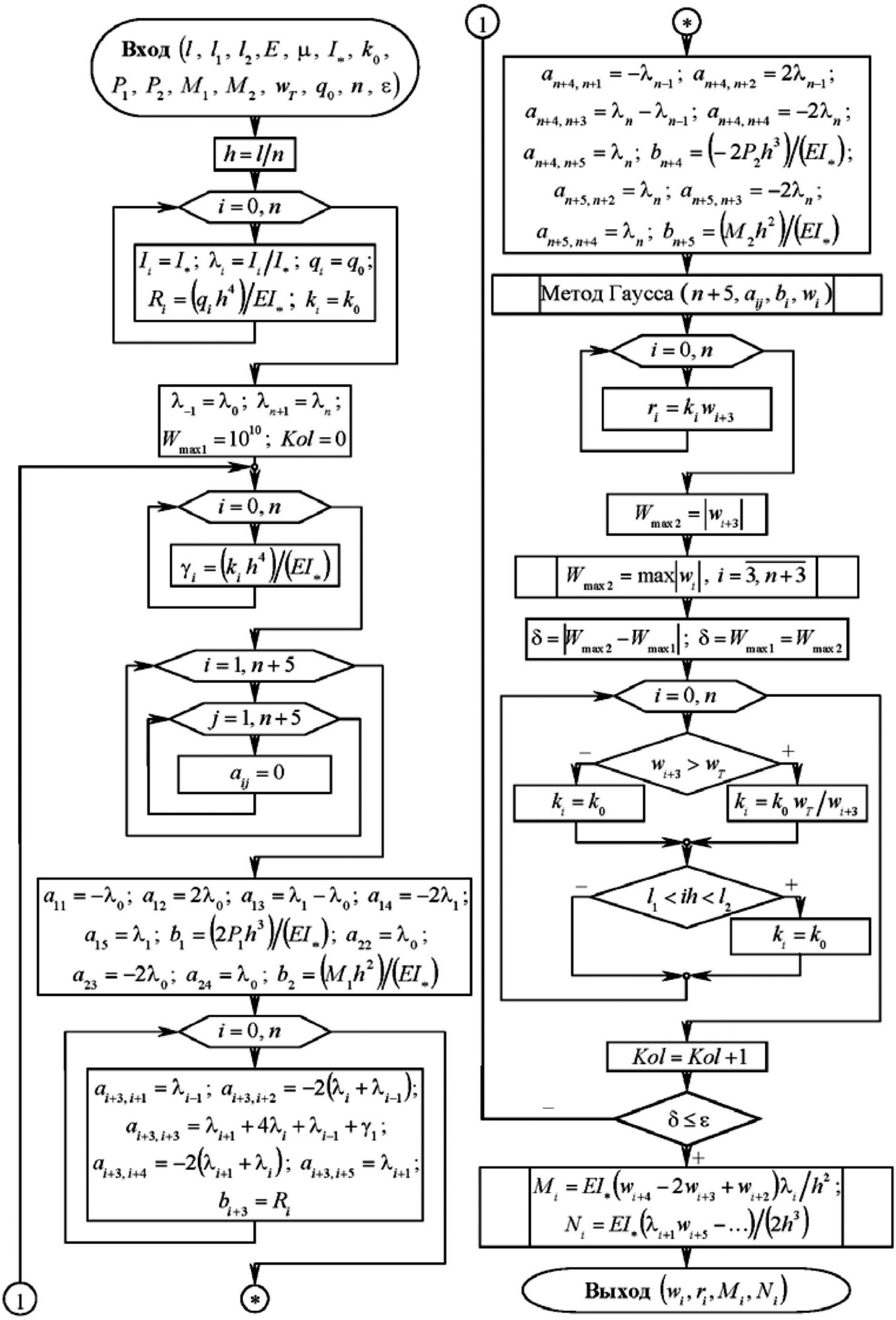

Рис. 2. Алгоритм расчета балки на упругопластическом основании

так, чтобы концы этих участков совпадали с базовыми точками, а внутри участков находилась, по крайней мере, одна базовая точка.

Для определения оптимальных значений h и Kol были выполнены тестовые расчеты балок, которые показали, что для практических расчетов с точностью порядка 1% достаточно принимать шаг $h=(0,1...0,125)L$, где L — габаритный размер конструктивного элемента. Число итераций для учета отступлений от закона Гука зависит как от величины превышения нагрузки по сравнению с предельно упругой, так и от заданной точности. При заданной точности и увеличении нагрузки число итераций возрастает, особенно при нагрузках, близких к предельно допустимым. Поэтому представляет практический интерес не число итераций процесса сходимости, а заданная погрешность.

В качестве примера на рис. 3 приведены результаты работы программы при следующих исходных данных: l = 100 м; l_1 =

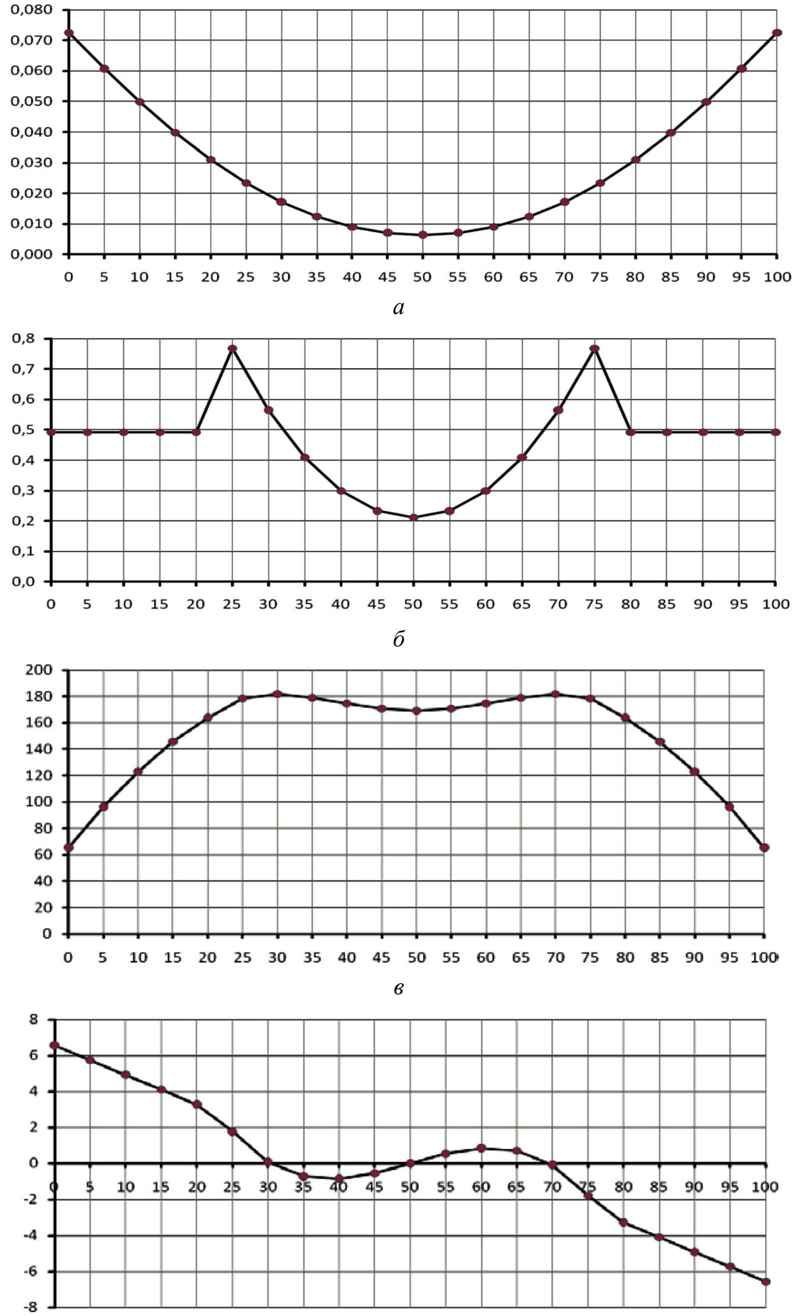

Рис. 3. Эпюры: *а* — $w = w(x)$; *б* — $r = r(x)$; *в* — $M = M(x)$; *г* — $N = N(x)$

$= l_2 = 20$ м; $\mu = 0{,}3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $I_* = 16$ м^4; $M_1 = M_2 = 65{,}6$ МН·м; $P_1 = P_2 = 6{,}56$ МН; $w_T = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $q(x) = q_0 = 0{,}328$ МН/м; $\varepsilon = 10^{-6}$.

Изменение коэффициента жесткости упругопластического основания по длине балки имеет вид: при $0 \le x \le l_1$ и $l - l_2 \le x \le l$ возникают пластические деформации, т.е. $(w(x) \ge w_T) - k(x,w) = k_0 w_T / w(x)$; при $l_1 \le x \le l_2$ основание упругое, т.е. $(w(x) < w_T) - k(x,w) = k_0$.

ВЫВОД

На основе математической модели изгиба балок на нелинейно деформируемом сплошном основании разработаны алгоритм и соответствующая ЭВМ-программа для расчетов. Полученный алгоритм, основанный на методе конечных разностей, позволяет почти вдвое уменьшить объем требуемых вычислений по сравнению с методом конечных элементов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Беленький, Л. М.* Расчет судовых конструкций в пластической стадии [Текст] / Л. М. Беленький. — Л. : Судостроение, 1983. — 448 с.

[2] *Бойцов, Г. В.* Справочник по строительной механике корабля [Текст] : в 3 т. / Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский. — Л. : Судостроение, 1982. — Т. 2. — 464 с.

[3] *Демидович, Б. П.* Основы вычислительной математики [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М. : Наука, 1970.

[4] *Дикович, И. Л.* Статика упругопластических балок судовых конструкций [Текст] / И. Л. Дикович. — Л. : Судостроение. 1967. — 264 с.

[5] *Курдюмов, А. А.* Строительная механика корабля и теория упругости / А. А. Курдюмов, А. З. Локшин, Р. А. Иосифов, В. В. Козляков. — Л. : Судостроение, 1968. — 420 с.

[6] *Михелев, И. Л.* Математическая модель и алгоритм расчета балок при сложном изгибе с учетом упругопластических деформаций [Эл. изд.] / И. Л. Михелев // Вісник НУК. — Миколаїв : НУК. — 2010. — № 3.