УДК 629.5.023.4
О 21

ОБОБЩЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ОТЕЧЕСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Ю. Н. Коробанов, проф., д-р техн. наук[1]
О. М. Лищук, инженер[2]
И. М. Лищук, инженер[2]

[1]*Национальный университет кораблестроения, г. Николаев*
[2]*Научно-исследовательский институт «Центр», г. Николаев*

Аннотация. Обобщены теоретические основы для выполнения инженерных расчетов судовых конструкций в отечественных САПР. Изложена математическая база метода граничных элементов, приведено граничное интегральное уравнение. В основу реализации расчетов судовых конструкций положен метод фиктивных нагрузок.

Ключевые слова: граничное интегральное уравнение, концентрация напряжений, интеграл Грина, напряженно-деформированное состояние.

Анотація. Виконано узагальнення теоретичних основ для виконання інженерних розрахунків суднових конструкцій у вітчизняних системах автоматизованого проектування. Викладена математична база методу граничних елементів, наведено граничне інтегральне рівняння. В основу реалізації розрахунків суднових конструкцій покладено метод фіктивних навантажень.

Ключові слова: граничне інтегральне рівняння, концентрація напружень, інтеграл Гріна, аналіз напружено-деформованого стану.

Abstract. The generalization of theoretical bases for engineering calculations of ship structures in the Ukrainian computer-aided design systems is performed. The mathematical base of the boundary elements method is set out; the boundary integral equation is presented. The method of fictitious loads is considered as the basis of ship structures calculation realization.

Keywords: integral equation, stress concentration, Green's integral, deformation state analysis.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Использование численных методов активно реализуется в судокорпусном проектировании. Так, например, в любом зарубежном продукте системы автоматизированного проектирования (САПР) обязательно присутствует возможность анализа напряженно-деформированного состояния (SafeHull, ShipRight). Следует, однако, признать, что подобной реализации нет в отечественных САПР судостроительной ориентации. Стоимость же подобных зарубежных разработок лежит вне возможности их приобретения украинскими конструкторскими бюро. Классификационные общества большинства судостроительных стран требуют не только соответствия нормам общей прочности проектируемых судов, но и проверки конструкций на устойчивость, жесткость, динамическую прочность. Предусматривается также совмещение расчетов прочности с проверкой удовлетворения критериям разрушения корпусных конструкций. Имидж Украины в судостроении и ее научный потенциал требуют создания собственных программных продуктов, которые можно внедрить в отечественные САПР.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Возможности метода граничных элементов (МГЭ) достаточно полно отображены в [2, 6]. В работе [3] говорится о необходимости автоматизации расчетов корпусных конструкций. Оценка достоверности результатов программ, созданных на базе одного из методов граничных элементов, дается в [4]. Вопросы непосредственной реализации МГЭ в САПР, а также построение общего алгоритма решения рассмотрены в [5]. Однако вопросы, связанные с обобщением теоретических основ реализации МГЭ в отечественных САПР, остаются слабо освещенными.

ЦЕЛЬ СТАТЬИ

Цель настоящей статьи — разработка теоретических основ для выполнения инженерных расчетов судовых конструкций в отечественных САПР, что даст возможность учитывать концентрацию напряжений на этапе проектирования и конструирования конструкций.

Задача исследования — поиск решения для выполнения анализа конструкций применительно к отечественной САПР/АСТПП «Деймос» [1].

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Для многих классов задач конечноэлементная реализация оказывается неудовлетворительной, и это заставило ученых обратиться к альтернативным методам, основывающимся на интегральных уравнениях.

В данной работе рассматривается один из таких подходов — метод граничных элементов. Сначала изложим математическую базу метода: исходная система дифференциальных уравнений пространственной задачи теории упругости преобразуется в граничное интегральное уравнение (ГИУ) относительно неизвестных поверхностных перемещений и напряжений. Для численного решения этого уравнения вся поверхность тела разбивается на ряд элементов, в пределах которых перемещения и напряжения интерполируются с помощью полимиальных функций через их значения в узловых точках.

Метод граничных элементов основан на линейной теории упругости. Материал принимается сплошным, однородным, изотропным.

Способ применения дифференциальных уравнений равновесия теории упругости состоит в использовании фундаментального решения задачи. Предположим, что в точках тела B разыскивается функция φ, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{внутри } B \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\varphi = f \text{ или } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = g \quad \text{на поверхности } \partial B.$$

В каждой точке поверхности ∂B тела B задана какая-либо одна из функций — f или g (и никогда обе одновременно) в зависимости от типа рассматриваемой задачи. Для определенности считается, что n — внешняя нормаль к поверхности.

Интеграл Грина (функция) связывает интегральным представлением решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Функция Грина краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений является фундаментальным решением уравнения с однородными краевыми условиями [7]

$$u(y) = \frac{1}{c}\int_{\Gamma}\left[v(x)\frac{\partial u}{\partial N} - u(x)\frac{\partial v}{\partial N}\right]ds \tag{2}$$

Итак, мы начнем с замечания, что $1/r$, где r — расстояние между двумя произвольными точками тела B, является сингулярным решением уравнения Лапласа. Если теперь применить к $1/r$ и к искомой функции φ формулу Грина (2) классического интегрального исчисления, то возникает известное тождество [7]

$$\varphi(p) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B}\left\{g(Q)\frac{1}{r(p,Q)} - f(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(p,Q)}\right]\right\}ds(Q), \tag{3}$$

где p — произвольная точка внутри тела B и Q — точка на поверхности ∂B.

При помощи тождества (3) произвольное решение $\varphi(p)$ уравнения (1) выражается в виде интеграла по поверхности тела B, который содержит фундаментальное сингулярное решение $1/r$, его нормальную производную и функции f и g, входящие в оба граничных условия. Подчеркнем, что в корректно поставленной задаче для уравнения Лапласа заранее известна лишь одна из функций — f или g (а не обе сразу).

Теперь предположим, что можно было бы каким-либо способом (не решая для этого полностью всю задачу) найти функцию f при заданном g или g при заданном f. При этом тождество (3) действительно давало бы искомое решение. Такой способ существует, и он являет суть метода граничных интегральных уравнений.

В самом деле, рассмотрим предельный переход в тождестве (3) при стремлении точки p тела B к произвольной точке P на ∂B, результатом которого является уравнение [7]

$$f(P)-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B}\left\{g(Q)\frac{1}{r(P,Q)}-f(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right]\right\}ds(Q)=0. \tag{4}$$

При этом учитывается, что $f(P)$ по определению является пределом $\varphi(p)$ при $p\to P$ и что интеграл (3), содержащий функцию f, при переходе к пределу испытывает скачок, равный $f(P)/2$. Уравнение (5) в нашем случае — граничное интегральное уравнение. Оно устанавливает связь между f и g и обеспечивает соответствие обеих функций одной и той же гармоничной функции φ. Кроме того, (4) рассматривается как уравнение, которое следует решать с целью определения f при заданном g или g при заданном f. Если решить (4) и найти f или g, то искомое решение φ в области B получается, как указывалось ранее, простым интегрированием по формуле (3).

Разновидность МГЭ — метод фиктивных нагрузок (задача Кельвина) используется в задачах про нагрузку, которая действует в упругой плоскости (рис. 1). Метод основан на замене переменных функциями. Роль неизвестных играют не перемещения и усилия в точках границы, а некоторые функции, называемые плотностями потенциалов или фиктивными нагрузками. Определив их из дискретного аналога граничных интегральных уравнений, легко находят величины напряженно-деформированного состояния внутри области.

Основное сингулярное решение такого метода вытекает из задачи Кельвина [6]. Решение задачи сосредоточенной силовой линии в упругой бесконечной среде (см. рисунок 1) выражается через функцию вида [2]

$$g(x,y)=-\frac{(1+\mu')}{4\pi}\ln(x^2+y^2)^{1/2}, \tag{5}$$

где μ' — коэффициент Пуассона; для плоского напряженного состояния выполняется замена коэффициента μ на $\mu'/(1+\mu')$.

Перемещения, вызванные воздействием усилия $F_i=(F_x, F_y)$, записываются тогда с использованием этой функции. Выражения для них имеют вид [2]

$$u=\frac{F_x}{E}\left[(3-\mu')g-(1+\mu')xg,_x\right]+\frac{F_y(1+\mu')}{E}(-yg,_x); \tag{6}$$

$$v=\frac{F_x(1+\mu')}{E}(-xg,_y)+\frac{F_y}{E}\left[(3-\mu')g-(1+\mu')yg,_y\right], \tag{7}$$

где частные производные записаны так: $\frac{\partial g}{\partial x}=g,_x$; $\frac{\partial g}{\partial y}=g,_y$. Напряжения выражаются также через указанную функцию (5) [2]:

$$\sigma_x=F_x\left[\frac{2}{(1+\mu')}g,_x-xg,_{xx}\right]+F_y\left(\frac{2\mu'}{(1+\mu')}g,_y-yg,_{xx}\right); \tag{8}$$

$$\sigma_y=F_x\left(\frac{2\mu'}{(1+\mu')}g,_x-xg,_{yy}\right)+F_y\left[\frac{2}{(1+\mu')}g,_y-yg,_{yy}\right]; \tag{9}$$

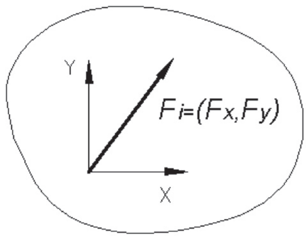

Рис. 1. Задача о действии усилия в плоскости

$$\tau_{xy} = F_x\left[\frac{(1-\mu')}{(1+\mu')}g,_y - xg,_{xx}\right] +$$

$$+F_y\left[\frac{(1-\mu')}{(1+\mu')}g,_x - yg,_{xy}\right], \qquad (10)$$

где частные производные функции фиктивной нагрузки (5) определяются следующим образом [6]:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g,_x = -\frac{(1+\mu')}{4\pi}\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = g,_y = -\frac{(1+\mu')}{4\pi}\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\cdot\partial y} = g,_{xy} = \frac{(1+\mu')}{4\pi}\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\cdot\partial x} = g,_{xx} = -g,_{yy} = \frac{(1+\mu')}{4\pi}\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

В результате анализа и исследований расчетных процедур МГЭ на примере задачи о вырезе были получены общий алгоритм процедуры, а также составляющие коэффициенты влияния и компоненты фиктивных нагрузок, входящие в процесс решения [5].

В работе [4] дана оценка достоверности работы программ, собранных на базе метода фиктивных нагрузок по данному алгоритму. Сравнительный анализ проведен на примере бесконечной пластины с круговым вырезом. Сопоставление данных теоретического решения с результатами расчетных процедур, полученных методами граничных элементов, показало хорошую согласованность.

Схема взаимосвязи расчетных процедур по МГЭ при внедрении их в различные системы автоматизированного проектирования для выполнения проверочных расчетов проектируемых конструкций показана на рис. 2. Модуль расчета конструкций состоит из серии программ, выполняющих расчеты определенных задач теории упругости. Геометрия исследуемой модели конструкции берется из файла данных *.dat или базы данных системы. На исследуемую модель накладываются расчетные нагрузки и действующие граничные условия.

Принципиальной схемой предусматривается многоблочная структура подпрограмм. Головная программа управляет входными и выходными операциями, а также содержит логические операции, необходимые

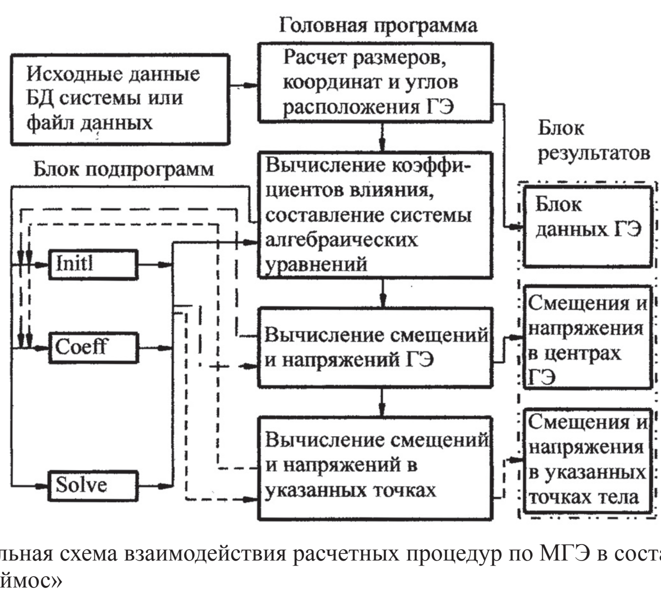

Рис. 2. Принципиальная схема взаимодействия расчетных процедур по МГЭ в составе отечественной САПР/АСТПП «Деймос»

для определения положения граничного элемента, построения системы алгебраических уравнений и вычисления неизвестных граничных параметров (смещений или усилий). Она является также основой для определения смещений и напряжений во всех внутренних точках через компоненты фиктивных нагрузок на всех граничных элементах. Выражения (5)–(10) реализуются в подпрограмме Coeff, а результаты (5)–(10) используются в головной программе для вычисления коэффициентов влияния смещений и напряжений [5, (1)–(6)] для граничных и внутренних (полевых)точек. Подпрограмма Initl используется в начале этих вычислений в случаях, когда учитываются условия симметрии, так что воображаемые граничные элементы порождаются внутри программы.

Операции с воображаемыми элементами производятся путем последовательного обращения к подпрограмме Coeff. Эта процедура выполняется после соответ-ствующего определения их координат и ориентации. Наконец, подпрограмма Solve решает систему алгебраических уравнений, построенную в головной программе. Процедура решения построена на методе исключения (метод Гаусса) без выбора ведущего элемента.

ВЫВОДЫ

1. Представленные в работе теоретические основы метода граничных элементов образуют фундамент для построения алгоритма расчетных процедур по МГЭ, что даст возможность создания программных комплексов по выполнению инженерных расчетов корпусных конструкций в отечественных судостроительных САПР.

2. Применение численных методов непосредственно в корпусных системах послужит качественному развитию и конкурентоспособности отечественных САПР/АСТПП, а также положительно скажется на надежности проектируемых конструкций.

3. Однотипность построения расчетных процедур на базе метода граничных элементов дает возможность совершенствования предлагаемого решения и расширения типов решаемых задач для оценки напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Дубив, И. И.* Возможности САПР/АСТПП «Деймос» [Текст] / И. И. Дубив, Б. Н. Мартынец, М. В. Руденко // Моринтехпрактик. Информационные технологии в судостроении — 2007 : мат. VIII Всерос. науч.-практ. конф. — СПб., 2007. — С. 77–79.

[2] *Коробанов, Ю. Н.* Анализ предпосылок использования методов граничных элементов в судостроительных системах автоматизированного проектирования [Текст] / Ю. Н. Коробанов, О. М. Лищук, И. М. Лищук // Зб. наук. праць НУК. — Миколаїв : НУК, 2006. — № 2 (407). — С. 31–38.

[3] *Коробанов, Ю. Н.* Автоматизация расчетов корпусных конструкций [Текст] / Ю. Н. Коробанов, О. М. Лищук // Автоматизация судостроительного производства и подготовка инженерных кадров: состояние, проблемы, перспективы : мат. междунар. науч.-метод. конф. — Николаев, 2007. — С. 130–133.

[4] *Коробанов, Ю. Н.* Проверка возможностей программ, собранных на базе метода граничных элементов, на примере бесконечной пластины с круговым вырезом [Текст] / Ю. Н. Коробанов, О. М. Лищук // Зб. наук. праць НУК. — Миколаїв : НУК, 2006. — № 6 (411). — С. 28–33.

[5] *Коробанов, Ю. Н.* Реализация прочностных расчетов конструкций судна в отечественных САПР [Текст] / Ю. Н. Коробанов, О. М. Лищук, И. М. Лищук // Зб. наук. праць НУК. — Миколаїв : НУК, 2009. — № 4 (427). — С. 105–111.

[6] *Крауч, С.* Методы граничных элементов в механике твердого тела [Текст] / С. Крауч, А. Старфилд. — М. : Мир, 1987. — 328 с.

[7] Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. — М. : Мир, 1978. — 210 с.