

УДК 629.5: 624.074 + 519.688  
К 75

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПЛАСТИН ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ

Ю. П. Кочанов, д-р техн. наук;  
И. Л. Михелев, канд. техн. наук

*Национальный университет кораблестроения, г. Николаев*

**Аннотация.** Приведена математическая модель и разработан алгоритм расчета плоского напряженно-деформированного состояния пластин при упругопластических деформациях. Результаты работы могут быть использованы при разработке ЭВМ-программ для указанных расчетов

**Ключевые слова:** пластина, плоское напряженно-деформированное состояние, упругопластические деформации, численные методы, алгоритмы расчета.

**Анотация.** Наведено математичну модель та розроблено алгоритм розрахунку плоского напружено-деформованого стану пластин при пружнопластичних деформаціях. Результати роботи можуть бути використані при розробці ЕОМ-програм для вказаних розрахунків.

**Ключові слова:** пластина, плоский напружено-деформований стан, пружно-пластичні деформації, числові методи, алгоритми розрахунку.

**Abstract.** The mathematical model is presented and the algorithm for calculating the plane stress with the elastic-plastic deformations. The results can be used in the development of the computer programs for calculating.

**Keywords:** spectral area, floating structures, durability, fatigue capacity, equivalent spectrum.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Исследование напряженного состояния конструкций за пределом упругости позволяет прояснить следующие основные проблемы: уточнить истинные запасы прочности конструкции; установить пределы аварийной прочности и возможность эксплуатации конструкции после прекращения действия аварийной нагрузки; определить внешние нагрузки по результатам измерения остаточных деформаций конструкции и ее элементов; оценить объем ремонта конструкций с эксплуатационными повреждениями.

## АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЙ

Расчету судовых конструкций в пластической стадии деформирования посвящены монографии [1–6] и справочник [7], основы теории пластичности изложены в учебниках по строительной механике корабля [8–10].

Из-за математических трудностей решения нелинейных задач теории пластичности практических результатов получено немного. В работах [1–2] решены простые частные задачи деформирования стержней в упругопластической стадии, при этом в подавляю-

шем большинстве материал стержней предполагается идеально упругопластическим.

Основное внимание как в работах [1–2], так и в [7] уделено определению предельных нагрузок для стержней, перекрытий и пластин. Характер деформирования за пределом упругости до исчерпания несущей способности конструкции исследуется мало. Это ограничивает область их практического применения.

**ЦЕЛЬ СТАТЬИ** — разработка математической модели и алгоритма для исследования плоского напряженного состояния тонких пластин при упругопластическом деформировании.

### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

При плоском напряженном состоянии [8–10], возникающем в тонких пластинах, принимается  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  или  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ , а напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  или  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  не равны нулю.

Для расчета пластины в плоском напряженном состоянии предложено использовать схему решения в перемещениях. Такой подход позволяет легко составить уравнения из граничных условий, заданных как в перемещениях, так и в напряжениях в декартовой системе координат (рис. 1).

Для определения компонентов НДС пластины при известных перемещениях будем использовать следующие зависимости [8–10]:

уравнения Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  — компоненты тензора деформаций;  $u, v$  — перемещения точек пластины вдоль осей координат  $0_x$  и  $0_y$ ;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{1-\mu^2}{E} X = 0; \\ \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1-\mu^2}{E} Y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

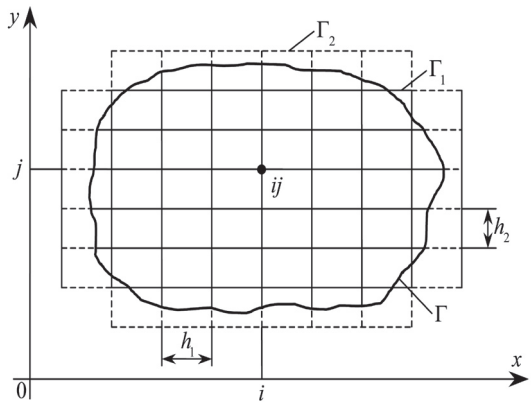


Рис. 1. Схема расположения узлов сетки в области с границей  $\Gamma$

закон деформирования для изотропного тела

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varphi_1 \varepsilon_x + \varphi_2 \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varphi_1 \varepsilon_y + \varphi_2 \varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G \varphi_3 \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1-\mu}{1-\mu_1} \varphi_3; \quad \varphi_2 = \mu_1 \varphi_1; \quad \varphi_3 = \frac{G_1}{G} = 1 - \omega(\gamma_0); \\ \mu_1 &= \frac{3\mu + (1-2\mu)\omega(\gamma_0)}{3 - (1-2\mu)\omega(\gamma_0)}; \quad \nu_1 = \frac{\mu_1}{(1-\mu_1)^2}; \\ \gamma_0 &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{4(1+\nu_1)(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 3(\gamma_{xy}^2 - 4\varepsilon_x \varepsilon_y)}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$E, \mu, G$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига материала в упругой стадии;  $E_1, \mu_1, G_1$  — то же в упругопластической стадии;  $\gamma_0$  — октаэдрический сдвиг;  $\omega(\gamma_0)$  — заданная функция, характеризующая упругопластические свойства материала и определяемая по результатам экспериментов.

С учетом зависимостей (2) и (1) разрешающая система уравнений равновесия в перемещениях примет такой вид:

Граничные условия при заданных на контуре перемещениях  $F_1(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $F_2(\bar{x}, \bar{y})$  будут

$$\left. \begin{aligned} u(\bar{x}, \bar{y}) &= F_1(\bar{x}, \bar{y}); \\ v(\bar{x}, \bar{y}) &= F_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) l + \frac{1-\mu}{2} \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m &= \frac{1-\mu^2}{E} p_x; \\ \frac{1-\mu}{2} \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left( \varphi_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) m &= \frac{1-\mu^2}{E} p_y, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $l, m$  — направляющие косинусы внешней нормали к контуру пластины.

Дифференциальные уравнения (4) с граничными условиями (5) или (6) с учетом зависимостей (3) позволяют определить перемещения  $u, v$ , после чего нетрудно найти деформации (1) и напряжения (2).

Для решения данной краевой задачи будем применять метод сеток. Покрывая

где  $\bar{x}, \bar{y}$  — координаты точек контура пластины.

При заданных на поверхности внешних силах с проекциями  $p_x, p_y$  граничные условия нетрудно получить из уравнений равновесия элементарного тетраэдра

заданную область пластины прямоугольной сеткой с шагами  $h_1$  и  $h_2$  (см. рис. 1), за основные неизвестные принимаем значения перемещений в узлах сетки  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$  и  $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ . Для замены производных в уравнениях (4), (6) конечно-разностными формулами используем следующие зависимости для частных производных функции двух переменных  $w = w(x, y)$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij} &= \frac{1}{2h_1} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}); \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{ij} = \frac{1}{h_1^2} (w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}); \\ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} &= \frac{1}{2h_2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}); \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{1}{h_2^2} (w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}); \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{ij} &= \frac{1}{4h_1 h_2} (w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для представления уравнений (4) в конечно-разностном виде получены следующие формулы для производных:

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{ij} &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]_{ij} = \\ &= \frac{1}{h_1^2} \left\{ \left[ \varphi_{ij} + \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) \right] \psi_{i+1,j} - 2\varphi_{ij} \psi_{ij} + \left[ \varphi_{ij} - \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j}) \right] \psi_{i-1,j} \right\}; \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]_{ij} &= \frac{1}{2h_1} \left[ \varphi_{i+1,j} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i-1,j} \right] = \\ &= \frac{1}{4h_1 h_2} \left[ \varphi_{i+1,j} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - \varphi_{i-1,j} (\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Зависимости (8), полученные с помощью формул (2), имеют второй порядок точности  $O(h^2)$ . Используя формулы (8) для произ-

водных, дифференциальные уравнения (4) можно представить в конечно-разностной форме для любого узла  $ij$  сетки:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{4}{\gamma} \left\{ \left[ \varphi_{1ij} + \frac{1}{4} (\varphi_{1,i+1,j} - \varphi_{1,i-1,j}) \right] u_{i+1,j} - \left[ 2\varphi_{1ij} + (1-\mu)\gamma^2 \varphi_{3ij} \right] u_{ij} + \right. \\
 & \left. + \left[ \varphi_{1ij} - \frac{1}{4} (\varphi_{1,i+1,j} - \varphi_{1,i-1,j}) \right] u_{i-1,j} + \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \left[ \varphi_{3ij} + \frac{1}{4} (\varphi_{3,i,j+1} - \varphi_{3,i,j-1}) \right] u_{i,j+1} + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \left[ \varphi_{3ij} - \frac{1}{4} (\varphi_{3,i,j+1} - \varphi_{3,i,j-1}) \right] u_{i,j-1} \right\} + \left( \varphi_{2,i+1,j} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i,j+1} \right) v_{i+1,j+1} - \\
 & - \left( \varphi_{1,i+1,j} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i,j-1} \right) v_{i+1,j-1} - \left( \varphi_{2,i-1,j} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i,j+1} \right) v_{i-1,j+1} + \\
 & + \left( \varphi_{2,i-1,j} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i,j-1} \right) v_{i-1,j-1} = -p_{1ij}; \\
 & \left( \varphi_{2,i,j+1} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i+1,j} \right) u_{i+1,j+1} - \left( \varphi_{2,i,j+1} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i-1,j} \right) u_{i-1,j+1} - \\
 & - \left( \varphi_{2,i,j-1} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i+1,j} \right) u_{i+1,j-1} + \left( \varphi_{2,i,j-1} + \frac{1-\mu}{2} \varphi_{3,i-1,j} \right) u_{i-1,j-1} + \\
 & + 4\gamma \left\{ \left[ \varphi_{1ij} + \frac{1}{4} (\varphi_{1,i,j+1} - \varphi_{1,i,j-1}) \right] v_{i,j+1} - \left[ 2\varphi_{1ij} + \frac{(1-\mu)}{\gamma^2} \varphi_{3ij} \right] v_{ij} + \right. \\
 & \left. + \left[ \varphi_{1ij} - \frac{1}{4} (\varphi_{1,i,j+1} - \varphi_{1,i,j-1}) \right] v_{i,j-1} + \frac{1-\mu}{2\gamma^2} \left[ \varphi_{3ij} + \frac{1}{4} (\varphi_{3,i+1,j} - \varphi_{3,i-1,j}) \right] v_{i+1,j} + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2\gamma^2} \left[ \varphi_{3ij} - \frac{1}{4} (\varphi_{3,i+1,j} - \varphi_{3,i-1,j}) \right] v_{i-1,j} \right\} = -p_{2ij},
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где  $p_{1ij} = \frac{4(1-\mu^2)h_1h_2}{E} X_{ij}$ ;

$p_{2ij} = \frac{4(1-\mu^2)h_1h_2}{E} Y_{ij}$ ;  $\gamma = \frac{h_1}{h_2}$ .

В линейно-упругой области коэффициенты уравнений (9) равны:  $\varphi_{1ij} = \varphi_{3ij} = 1$ ;  $\varphi_{2ij} = \mu$ .

Для определения этих коэффициентов в упругопластической области деформаций в узлах сетки вычисляются деформации (1):

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_{xij} &= \frac{1}{2h_1} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}); \\
 \varepsilon_{yij} &= \frac{1}{2h_2} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}); \\
 \gamma_{xyij} &= \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2h_2} + \frac{(v_{i+1,j} - v_{i-1,j})}{2h_1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

С учетом (10) по формуле (3) определяется октаэдрический сдвиг  $\gamma_{0ij}$ , а по заданной диаграмме деформирования находится функция пластичности  $\omega(\gamma_0)$  при  $\gamma_0 > \gamma_i$ , где  $\gamma_i$  — деформация октаэдрического сдви-

га, при которой начинается реальная (или условная) текучесть материала пластины.

Для выполнения граничных условий (5) или (6) их надо перенести с истинного контура  $\Gamma$  на сеточный контур  $\Gamma_1$  (см. рис. 1). Это можно сделать прямым сносом: заданные значения  $F_1, F_2, P_x, P_y, I, m$  на истинном контуре приписать ближайшей точке сеточного контура. При этом погрешность будет порядка  $O(h_0)$ , где  $h_0$  — расстояние между ближайшими точками истинной и сеточной границ.

Точнее перенос граничных условий можно сделать с помощью линейной интерполяции или экстраполяции, устанавливая зависимости между значениями рассматриваемых функций во внутренней точке области, ближайшей к сеточному контуру, и в точках истинного и сеточного контуров.

На рис. 2 показана реальная ситуация расположения указанных точек: точки 1–3 принадлежат сеточному контуру  $\Gamma_1$ , точки 4–6 — истинному контуру, точка 0 — вну-

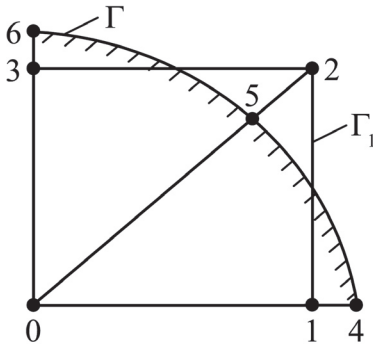


Рис. 2. Расположение сеточного контура относительно истинного

три области пластины. Тогда в случае граничных условий (5) в точках сеточного контура имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(1)} = \left( \varphi_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) l + \frac{1-\mu}{2} \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m; \quad p = \frac{1-\mu^2}{E} p_x; \\ \Phi &= \Phi^{(2)} = \frac{1-\mu}{2} \varphi_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left( \varphi_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) m; \quad p = \frac{1-\mu^2}{E} p_y, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Значения направляющих косинусов нормали к контуру пластины в (13), а также  $p_x, p_y$  определяются на истинном контуре.

Граничные условия, представленные уравнениями (11) или (12), имеют погрешность порядка  $O(h^2)$ , что на порядок меньше по сравнению с прямым переносом.

Для представления первых частных производных, входящих в (12), по формулам (7) потребуется включить в качестве неизвестных значения  $u$  и  $v$  в одном слое  $\Gamma_2$  законтурных точек. Для определения узловых перемещений  $u_{ij}, v_{ij}$  используются уравнения (9) совместно с граничными условиями в конечно-разностной форме. Поскольку коэффициенты системы (9) нелинейно зависят от перемещений (вследствие зависимостей (3), (1)), расчет выполняется методом итераций. В первом приближении рассматривается упругое решение с постоянными механическими характеристиками  $E, \mu$ . По формулам (10) вычисляются деформации в узлах сетки, по формуле (3) — октаэдрический сдвиг  $\gamma_0$ . В узлах, где  $\gamma_0 > \gamma_c$ , по механической диаграмме  $\tau_{\text{окт}} = f(\gamma_0)$  определяется текущий модуль сдвига  $G_1$  и функция пластичности

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= F_5 + \frac{l_{25}}{l_{05}} (F_5 - F_0); \\ F_3 &= F_0 + \frac{l_{03}}{l_{06}} (F_6 - F_0), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $l_{mn}$  — расстояние между точками  $m$  и  $n$ ;  $F_m$  — функции  $F_1(\bar{x}, \bar{y})$  или  $F_2(\bar{x}, \bar{y})$  в точке  $m$ .

В случае граничных условий (6) можно записать такие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2 &= p_5 + \frac{l_{25}}{l_{05}} (\Phi_5 - \Phi_0); \\ \Phi_3 &= p_0 + \frac{l_{03}}{l_{06}} (\Phi_6 - \Phi_0), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где соответственно для первого и второго уравнений (6)

$$\omega(\gamma_0) = 1 - \frac{G_1}{G} \quad (14)$$

Для второго приближения с учетом (14) вычисляются новые значения коэффициентов уравнений (9) и решается система этих уравнений. В последующих приближениях процесс вычислений повторяется до достижения необходимой точности. Отметим, что система (9) совместно с граничными условиями в конечно-разностной форме хорошо адаптируется для применения шаговых методов нагружения. Расчеты по полученному алгоритму показывают хорошую сходимость как по модулю максимального прогиба пластины в зависимости от числа узловых точек сетки  $n$ , так и самого итерационного процесса уточнения компонентов плоского напряженного состояния пластины при фиксированном значении  $n$ . Для свободно опертых пластин сходимость  $|w_{\text{max}}| = f(n)$  зигзагообразная, а для жестко защемленных — плавная. При этом в любом случае исследуемых граничных условий с приемлемой для практики точностью достаточно пяти приближений для уточнения  $|w_{\text{max}}|$  при заданном значении  $n$ .

## ВЫВОД

Разработана математическая модель расчета плоского напряженно-деформированного состояния пластин при упругопластических деформациях. Алгоритм указанного расчета сводится к решению систем

линейных алгебраических уравнений, для чего могут быть использованы стандартные ЭВМ-подпрограммы. Полученный алгоритм можно применить при расчете напряженно-деформированного состояния поперечных переборок и платформ корпуса судна.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Беленький, Л. М.* Расчет судовых конструкций в пластической стадии [Текст] / Л. М. Беленький. — Л. : Судостроение, 1983. — 448 с.
- [2] *Дикович, И. Л.* Статика упругопластических балок судовых конструкций [Текст] / И. Л. Дикович. — Л. : Судостроение, 1967. — 264 с.
- [3] *Ильюшин, А. А.* Пластичность [Текст] / А. А. Ильюшин. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. — 380 с.
- [4] *Качанов, Л. М.* Основы теории пластичности [Текст] / Л. М. Качанов. — М. : Наука, 1969. — 420 с.
- [5] *Клюшников, В. Д.* Математическая теория пластичности [Текст] / В. Д. Клюшников. — М. : Изд-во МГУ, 1979. — 208 с.
- [6] *Соколовский, В. В.* Теория пластичности [Текст] / В. В. Соколовский. — М. : Высшая школа, 1969. — 608 с.
- [7] Справочник по строительной механике корабля / [Г. В. Бойцов, О. М. Палий, В. А. Постнов, В. С. Чувиковский] : в 3 т. — Л. : Судостроение, 1982. — Т. 2. — 464 с.
- [8] *Суслов, В. П.* Строительная механика корабля и основы теории упругости [Текст] / В. П. Суслов, Ю. П. Кочанов, В. Н. Спихтаренко. — Л. : Судостроение, 1972. — 720 с.
- [9] Строительная механика корабля и теория упругости [Текст] / [А. А. Курдюмов, А. З. Локшин, Р. А. Иосифов, В. В. Козляков]. — Л. : Судостроение, 1968. — 420 с.
- [10] *Постнов, В. А.* Строительная механика корабля и теория упругости [Текст] / В. А. Постнов, В. П. Суслов: учеб. для вузов : в 2 т. — Л. : Судостроение, 1987. — Т. 1. — 288 с.