

ЗАЛЕЖНІСТЬ ПОХИБКИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ВІД ІНТЕРВАЛУМІЖ ОБСЕРВАЦІЯМИ В НАВІГАЦІЙНОМУ ПОЛІ МОРСЬКОЇ ПОВЕРХНІ

С. Ю. Інфімовський, канд. техн. наук, старш. наук. співроб.,
начальник відділу розслідування, обліку та профілактики
аварійних подій, старший державний інспектор

Головна державна інспекція України з безпеки судноплавства, м. Одеса

Анотація. Розглянуто залежність похибки інтерполяції від кількості станцій обсервацій та їх взаємної орієнтації при плануванні знімання просторового навігаційного поля морської поверхні в інтересах прогнозування точності супутникового навігаційного забезпечення безпеки мореплавства.

Ключові слова: похибка інтерполяції, станції обсервацій, навігаційне поле, супутникові навігаційні системи.

Аннотация. Рассмотрена зависимость погрешности интерполяции от количества станций обсерваций и их взаимной ориентации при планировании съёмки пространственного навигационного поля морской поверхности в интересах прогнозирования точности спутникового навигационного обеспечения безопасности море-плавания.

Ключевые слова: погрешность интерполяции, станции обсерваций, навигационное поле, спутниковые навигационные системы.

Abstract. The dependence of the interpolation error from the quantity of observation stations and from their mutual orientation during the planning of taking pictures of the space navigating area of the sea surface in interests of accuracy prognostication of the satellite navigating safety is considered.

Keywords: interpolation error, observation stations, navigating area, satellite navigating systems.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Побудова карт просторових полів похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні є найважливішою кінцевою метою навігаційного оплавування (уточнення поля навігаційних похибок) супутникових навігаційних систем (далі — ССН). Ефективність застосування статистичних методів розрахунку карт похибок обсервацій навігаційного поля морської поверхні визначається обсягом даних, які є у розпорядженні фахівців з навігаційного забезпечення. Чим повніша

й значніша за обсягом вихідна інформація, тим вища точність його відновлення в довільній точці.

Але з економічних міркувань кількість вимірювань у навігаційному полі повинна бути обмеженою лише тим мінімумом, який є необхідним для успішного застосування оптимальної інтерполяції. Тому на практиці потрібно обирати таку схему вимірювань у навігаційному полі морської поверхні, що забезпечить задану (середню по полю) точність інтерполяції за умови найменш

можливої кількості вимірювань. Установлення залежностей похибки інтерполяції від кількості станцій та їх взаємної орієнтації складає основний зміст задачі планування знімання просторового навігаційного поля морської поверхні.

МЕТА СТАТТІ

Метою статті є дослідження у латеральному просторовому навігаційному полі морської поверхні впливу кількості обсервацій (станцій навігаційних реалізацій) та їхньої взаємної орієнтації на похибку інтерполяції й встановлення між ними залежності в інтересах прогнозування точності супутникового навігаційного забезпечення безпеки мореплавства.

ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

У зв'язку з розвитком навігаційної вимірювальної техніки, яка пов'язана з використанням ССН, в останні роки все більшої актуальності набуває економічний підхід до вирішення задач раціонального, науково обгрунтованого планування створення сегмента берегових засобів навігаційного обладнання ССН, до якого й належить мережа морської диференційної підсистеми ССН. Запровадження автоматизованих систем збору та обробки навігаційної інформації для прогнозування стану навігаційного поля морської поверхні виключної (морської) економічної зони України потребує значних матеріальних витрат. Вартість навігаційної інформації повинна бути порівнянною з тими можливими збитками господарській діяльності та екологічній безпеці, які можливо попередити за рахунок прогнозування стану навігаційного поля морської поверхні й належного функціонування системи навігаційного забезпечення безпеки морської діяльності в цілому (розглянуто у [5] на прикладі Японії).

Конкретні рекомендації щодо планування мережі контрольно-корегуючими станціями морської диференційної підсистеми (далі — ККС МДП) ССН можуть бути отримані при розгляді більш вузької задачі: вибору найкращої відстані між контрольно-корегуючими станціями.

Оцінка найбільш доцільної відстані між станціями проводиться на основі методу О. Дроздова та О. Шепелевського [6]. При цьому використовується підхід, заснований на статичній моделі просторового поля навігаційних елементів орбіт. О. Дроздов та О. Шепелевський встановили аналітичну залежність між розподілом похибок оптимальної інтерполяції $\varepsilon(l)$ на відрізку l , який поєднує дві сусідні станції, та довжиною цього відрізка:

$$\varepsilon(l) = \frac{3}{2}K(0) - 2K\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2}K(l) + \frac{1}{2}\eta.$$

Найбільший інтерес під час планування навігаційних вимірів становить та спектральна сітка, яка дозволяє задовольнити ці умови при мінімальній кількості вузлів. Будемо називати цю сітку найбільш ефективною. Для порівняння ефективності різних сіток відліків у [10] запропоновано до використання параметр

$$\eta = \frac{S}{P} = \frac{SQ}{(2\pi)^n}.$$

Якщо спектральна сітка має квадратну форму, найбільш щільне розміщення основ спектрів $\Phi(\vec{\omega} + \mathbf{U}_{[m]})$ на площині $(\vec{\omega})$, при якому виконуються умови перетворення у нуль похибки інтерполяції, в цьому випадку параметр $\eta = \pi B^2/4B^2 = 0,785$. Найбільш щільне розташування основ спектрів поля відбувається у 60-градусній ромбічній сітці. Ефективність цієї сітки характеризується значеннями

$$\eta = \frac{\pi B^2}{2\sqrt{3}B^2} = 0,908,$$

тобто суттєво вище, ніж у квадратній. Можна показати, що 60-градусна ромбічна сітка і є найбільш ефективною для двовимірних ізотропних полів [11].

Для відшукування сітки вимірів, яка відповідає обраній спектральній сітці, достатньо скористатися співвідношеннями

$$\vec{V}_{[l]} = l_1 \vec{V}_1 + l_2 \vec{V}_2 \quad (l_1, l_2 = \pm 1; \pm 2, \dots)$$

та $\vec{V}_j \vec{u}_k = 2\pi \delta_{jk}$ (δ_{jk} — символ Л. Кронекера).

З умови ортогональності базисних векторів випливає, що гексагональний регулярний спектральній сітці відповідає сітка вимірів, основна чарунка якої також має форму 60-градусного ромба (рис. 1) [7].

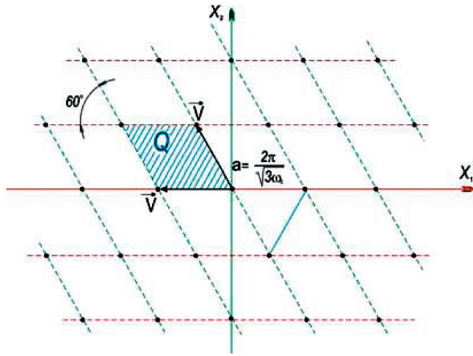


Рис. 1. Сітка навігаційних реалізацій ізотропного випадкового поля похибок обсервацій

Сторона цього ромба, або крок між навігаційними вимірами, може бути легко отримана зі співвідношення

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega_c}$$

Таким чином, якщо відома частота B для спектра двовимірного ізотропного поля, знайти раціональний інтервал між вимірами поля неважко. Аналогічно у випадку тривимірного поля найбільш ефективна сітка вимірів має чарунку у формі правильного паралелепіпеда, грані якого утворені 60-градусним ромбом, а ребра визначаються формулою з [1, 2]

$$a = \frac{\pi\sqrt{2}}{\omega_c}$$

Отже, поведінка похибки інтерполяції між навігаційними реалізаціями при оплавуванні навігаційного поля в залежності від їх кількості та взаємної орієнтації потребує більш прискіпливого дослідження.

Вираз для похибки інтерполяції двовимірного поля має вигляд [8, 9]

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^{2\pi\omega_c} \int_0^{2\pi\omega_c} \Phi_2(\omega) \omega d\omega. \quad (1)$$

і дисперсія береться рівною одиниці.

Підставляючи сюди Φ_2 з

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty K(r) \left(\frac{r}{\omega}\right)^{n-2} I_{n-2}(\omega)rdr. \quad (2)$$

де r — модуль зсуву, тобто $r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$; ω — модуль вектора у просторі хвильових чисел;

$I_\nu(z)$ — функція першого роду Бесселя порядку ν ,

при $n = 2$ маємо

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^{\omega_c} \int_0^{\omega_c} \omega K(r) J_0(\omega r) dr d\omega.$$

Змінюючи порядок інтегрування та зробивши заміну змінних $y = \omega r$, наведемо формулу у вигляді

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \int_0^\infty \frac{K(r)}{r} \int_0^{\omega_c r} y J_0(y) dy dr,$$

звідки, використовуючи рекурентне співвідношення для функції Бесселя

$$y I_0(y) = \frac{d}{dy} y I_1(y),$$

отримаємо

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \omega_c \int_0^\infty K(r) I_1(\omega_c r) dr,$$

або

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \omega_c H_2 \left\{ \frac{K(r)}{r} \right\}, \quad (3)$$

де $H_2 \left\{ \frac{K(r)}{r} \right\}$ — перетворення Ханкеля першого порядку.

Таким чином, у випадку двовимірного ізотропного поля похибку інтерполяції можливо обрахувати за кореляційною функцією, яку отримуємо з будь-якої одновимірної реалізації поля.

Перейдемо до тривимірного простору. У ньому формула, подібна до (1), має вигляд

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - \int_0^{\omega_c} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_3(\omega) \omega^2 \sin \theta d\theta d\omega.$$

Виконавши інтегрування за кутовими координатами:

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - 4\pi \int_0^{\omega_c} \Phi_3(\omega) \omega^2 d\omega \quad (4)$$

та підставивши замість $\Phi_3(\omega)$ його вираз із (2) при $n = 3$, маємо

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + 2\pi \int_0^{\omega_c} \frac{d\Phi_1(\omega)}{d\omega} \omega d\omega,$$

звідки

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + 2\omega_c \Phi_1(\omega) - 2 \int_0^{\omega_c} \Phi_1(\omega) d\omega. \quad (5)$$

Зазначивши, що перший та третій члени у правій частині (5) дають вираз для похибки в одновимірному випадку, можна записати (5) наступним чином:

$$\varepsilon_3(\omega_c) = \varepsilon_1(\omega_c) - \omega_c \frac{d\varepsilon_1(\omega_c)}{d\omega_c}.$$

Знайдені вирази дозволяють визначити якість відліків поля похибок обсервацій, що забезпечують задану точність його відновлення. Дійсно, за умови, що область навігаційних вимірів достатньо велика для кількості відліків, приблизно маємо

$$N_{cp} \cong \frac{V}{Q},$$

де V — обсяг області навігаційних вимірів; Q — обсяг елементарної чарунки сітки навігаційних вимірів.

Розглянемо конкретні залежності, які отримано для полів з кореляційними функціями для випадків, коли $n = 2, 3$.

1) $K(r) = e^{-ar^2}$.

У дво- та тривимірному випадках спектральні щільності відповідно мають вигляд

$$\Phi_2(\omega) = \frac{1}{4\alpha\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

та $\Phi_3(\omega) = \frac{1}{8(\alpha\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

Формула (3) для випадку двох вимірів приводить до виразу

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 - \frac{\omega_c}{4\alpha} {}^1F_1\left(1, 2, -\frac{\omega_c^2}{4\alpha}\right),$$

де ${}^1F_1(a, b, z)$ — вироджена гіпергеометрична функція.

Перетворивши ${}^1F_1(a, b, z)$, отримуємо

$$\varepsilon_2(\omega_c) = e^{-\frac{\omega_c^2}{4\alpha}},$$

звідки

$$\omega_c = 2\sqrt{\alpha \ln \varepsilon^{-1}}.$$

З урахуванням указаних співвідношень для ω_c, α, N_{cp} у двовимірному випадку маємо

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\ln \sqrt{\varepsilon^{-1}}};$$

$$N_{cp} \cong \frac{2\sqrt{3}H}{\pi^2} \alpha \ln \varepsilon^{-1}$$

де H — площа області навігаційних вимірювань; a — крок сітки навігаційних вимірювань.

У тривимірному випадку, використовуючи (5), отримаємо

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\omega_c}{\sqrt{4\alpha}} e^{-\frac{\omega_c}{4\alpha}} - F\left(\frac{\omega_c}{4\alpha}\right),$$

$$\omega_c = \frac{2\pi\sqrt{2\alpha}}{a},$$

де $F(z)$ — інтеграл, який має вигляд

$$F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-y^2} dy.$$

2) $K(r) = e^{-ar}$.

Відповідні спектральні щільності:

$$\Phi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

та $\Phi_3(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$.

Формула (3) у цьому випадку дає

$$\varepsilon_2(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}}}$$

звідки отримаємо

$$a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}};$$

$$N_{cp} \cong \frac{H\sqrt{3}}{2\pi^2} \alpha^2 \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2},$$

де H — площа області навігаційних вимірювань.

Для тривимірного випадку, використовуючи (5), отримаємо

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\omega_c}{\alpha}}{1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\omega_c}{\alpha},$$

звідки з урахуванням $a = \frac{\pi\sqrt{2}}{\omega_c}$

3) $K(r) = \frac{(ar)^{\nu}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} K_{\nu}(ar)$.

Відповідні спектральні щільності:

$$\Phi_2(\omega) = \frac{\nu}{\pi} \cdot \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+1}};$$

$$\Phi_3(\omega) = \frac{\nu + \frac{1}{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{\alpha^{2\nu}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{\nu + \frac{3}{2}}}$$

Формула (3) для двовимірного випадку приводить до виразу

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{\omega_c^2}{\alpha^2} {}_2F_1\left(\nu + 1, 1, 2, \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right)$$

де ${}_2F_1(a, b, c, z)$ — гіпергеометричний ряд.

Виконавши відповідні перетворення, отримаємо

$$\varepsilon_2(\omega_c) = \frac{\alpha^{2\nu}}{(\omega_c^2 + \alpha^2)^\nu}; \quad a = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon^\nu}{1 - \varepsilon^\nu}};$$

$$N_{\text{ср}} \cong \frac{H\sqrt{3}}{2\pi^2} \alpha^2 \frac{1 - \varepsilon^\nu}{\varepsilon^\nu}$$

$$\Phi_n(\omega) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\alpha \cos \frac{n+1}{2} \arctg \frac{2\alpha\beta}{\gamma} + \beta \sin \frac{n+1}{2} \arctg \frac{2\alpha\beta}{\gamma}}{[\gamma^2 + 4\alpha^2\beta^2]^{\frac{n+1}{4}}}$$

для $n = 2$ та $n = 3$ відповідно

$$\Phi_2(\omega) = \frac{\alpha\sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} + \gamma(\gamma^2 - 3\eta)} + \beta\sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}} - \gamma(\gamma^2 - 3\eta)}}{2\sqrt{2}\pi(\gamma + \eta)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\Phi_3(\omega) = \frac{\alpha}{\pi^2} \cdot \frac{\gamma^2 + 4\beta^2(K^2 - \beta^2)}{(\gamma^2 + 4\alpha^2 - \beta^2)^2},$$

де $\gamma = K^2 + \alpha^2 - \beta^2$, $\eta \equiv 4\alpha^2\beta^2$.

У цьому випадку переваги обчислення $\varepsilon_2(\omega_c)$ з використанням формули (3) у порівнянні з прямим інтегруванням виразу для $\Phi_2(\omega)$ особливо помітно:

$$\varepsilon_2(\omega_c) = 1 - \omega_c \int_0^\infty K(r) I_1(\omega_c r) dr = \frac{\alpha\sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} + \gamma} + \beta\sqrt{(\gamma^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} - \gamma}}{\sqrt{2}(\gamma + \eta)^{\frac{1}{2}}}$$

Ураховуючи те, що

$$\varepsilon_1(\omega_c) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\omega_c + \beta}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\gamma}{2\alpha\beta},$$

і використовуючи формулу (4), маємо

$$\varepsilon_3(\omega_c) = \frac{3}{2} + \frac{\omega_c}{\pi} \frac{2\alpha\gamma}{\gamma^2 + \eta} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\omega_c + \beta}{\alpha} - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\gamma}{2\alpha\beta}$$

Підставляючи в ці вирази замість ω_c пов'язані з нею а та $N_{\text{ср}}$, можна отримати шукане співвідношення для планування мережі ККС МДП ССН.

Відзначимо, що при $\nu = 1/2$ з останніх співвідношень знаходяться формули, які отримано вище для другого випадку.

Для тривимірного просторового поля, опускаючи проміжні викладення, наведемо тільки остаточний результат при $\nu = 3/2$:

$$\varepsilon_3(\omega_c) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\omega_c}{\alpha} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right)}{\left(1 + \frac{\omega_c^2}{\alpha^2}\right)^2} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\omega_c}{\alpha};$$

$$\varepsilon_3(\alpha) = 1 + \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a \left(1 - \frac{\alpha^2}{2\pi^2} a^2\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} a^2\right)} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\alpha}{\pi\sqrt{2}} a.$$

$$4) K(r) = e^{-\alpha r} \cos \beta r.$$

З урахуванням

побудована за одновимірною реалізацією випадкового поля похибок обсервацій кореляційна функція апроксимована однією з розглянутих типових функцій. Деякі з цих залежностей наведені у вигляді графіків на рис. 2.

На осі абсцис усіх графіків відкладені значення кількості ККС МДП ССН N та відстані між ними a , на осі ординат — значення величини відносної середньої похибки інтерполяції, яка змінюється на інтервали від 0 до 1.

Припущення про ізотропність випадкових складових дозволило звести розгляд задачі планування мережі вимірів за допомогою ККС МДП ССН до одновимірного простору. Реальні поля, як відзначалося, рідко задовольняють з достатньою точністю умову ізотропності. У деякому більшому ступені точності їх кореляційні функції апроксимують функціями, у яких поверхні рівних значень є еліпсоїдами.

Легко впевнитися у тому, що для відшукування головних осей еліпсоїда анізотропності у двовимірному полі достатньо здійснити виміри трьох одновимірних реалізацій поля й розрахувати за ними відповідні до їх напрямів функції кореляції. Для тривимірного поля необхідно виконати виміри

за шістьма напрямками. Знаючи співвідношення півосей анізотропії, неважко змінити масштаби координатних осей поля таким чином, щоб привести його до ізотропної моделі [3, 4]. Очевидно, що наведені розрахункові формули зберігають силу в подібних випадках анізотропії.

Оскільки область вимірів поля похибок обсервацій має кінцеві розміри, це, безумовно, приводить до збільшення похибок розрахунку карти поля похибок обсервацій (навігаційних реалізацій) методом оптимальної інтерполяції для тих точок, які знаходяться поблизу меж латерального району навігаційного забезпечення.

Знайдені таким чином оцінки будуть вірні у першому наближенні. Наведені на рис. 2 залежності дозволяють вирішувати завдання планування знімання випадкових полів похибок обсервацій в латеральному просторовому навігаційному полі морської поверхні, тобто теоретичним шляхом визначати інтервали між ККС МДП ССН a в ході підготовки навігаційного поля морської поверхні до навігаційного забезпечення безпеки морської діяльності в морських водах України тим мінімумом, який є необхідним для успішного застосування оптимальної інтерполяції.

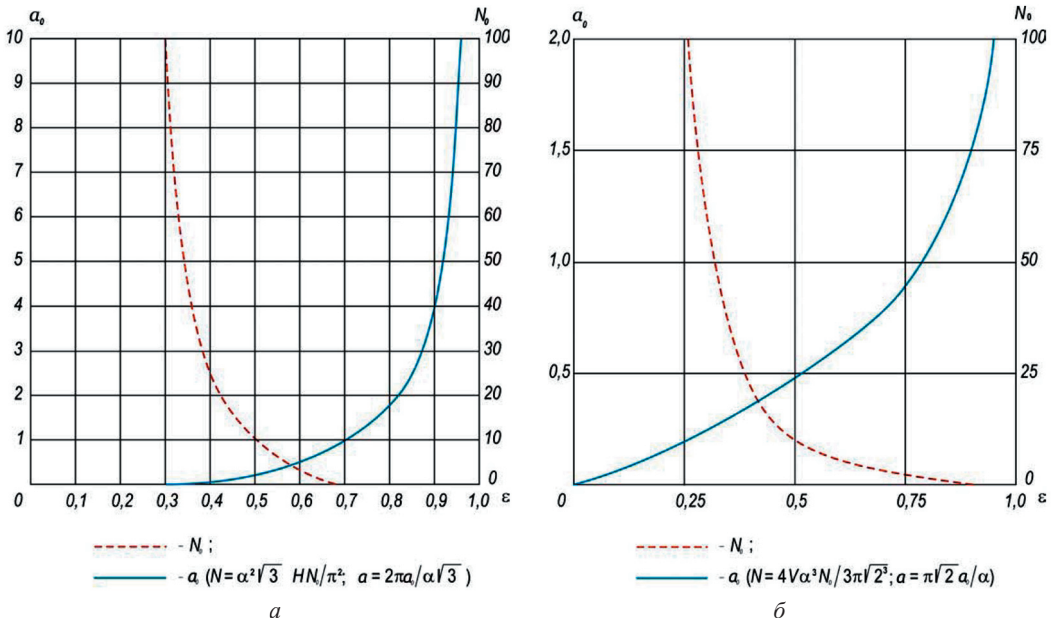


Рис. 2. Залежність похибки оптимальної інтерполяції поля, яке має експоненціальну кореляційну функцію, від числа станцій N та відстані між ними a : a — для двовимірного поля; b — для тривимірного поля

ВИСНОВКИ

Застосування розглянутої методики дає змогу оцінити емпіричну функцію кореляції одновимірної реалізації поля, яка взята на довільному напрямку й апроксимована до однієї з типових аналітичних формул, що дозволяє обирати таку схему вимірювань у навігаційному полі морської поверхні, яка

забезпечує задану (середню по полю) точність інтерполяції за умови найменш можливої кількості вимірювань. Перспективою подальшої роботи з даного напрямку досліджень є розгляд складової похибки розрахунку поля похибок обсервацій, яка викликана впливом меж району навігаційного забезпечення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] *Беляев, В. И.* Объективный анализ поля температуры Черного моря [Текст] / В. И. Беляев, А. И. Ермоленко, А. И. Жилина, И. Е. Тимченко // ДАН УССР. Сер. Б. — 1968. — № 5. — С. 421–424.
- [2] *Беляев, В. И.* Применение теории случайных функций к изучению морских течений [Текст] / В. И. Беляев, В. С. Болдырев // Океанология. — 1963. — Вып. 6. — С. 953–961.
- [3] *Беляев, В. И.* Размещение измерений и точность восстановления поля при автоматизированном сборе и обработке гидрофизической информации [Текст] / В. И. Беляев, И. Е. Тимченко // Автоматизация науч. исслед. морей и океанов : симпоз. — Севастополь, 1969. — С. 327–341.
- [4] *Беляев, В. И.* Статистическое согласование гидрофизических полей [Текст] / В. И. Беляев, И. Е. Тимченко, В. Д. Ярин // Мор. гидрофиз. исслед. — 1970. — № 1. — С. 81–97.
- [5] *Гандин, Л. С.* Статистические методы интерпретации метеорологических данных [Текст] / Л. С. Гандин, В. Л. Каган. — Л. : Гидрометеиздат, 1976. — 280 с.
- [6] *Дроздов, О. А.* Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети [Текст] / О. А. Дроздов, А. А. Шепелевский // Тр. НИУ ГУГМС. Сер. 1. — 1946. — Вып. 13. — С. 65–115.
- [7] *Инфимовский, С. Ю.* Обобщение корреляционного алгоритма оптимальной интерполяции [Текст] / С. Ю. Инфимовский // Судостроение. — 2008. — № 9. — С. 19–21.
- [8] *Моисеев, Г. А.* Планирование сети станций для измерений случайных составляющих физических полей океана [Текст] / Г. А. Моисеев, И. Е. Тимченко // Мор. гидрофиз. исслед. — 1971. — № 5. — С. 124–143.
- [9] *Моисеев, Г. А.* Рационализация съемки пространственно-временных полей океана для построения прогностических карт [Текст] / Г. А. Моисеев, И. Е. Тимченко // Мор. гидрофиз. исслед. — 1973. — № 4. — С. 132–148.
- [10] *Miykawa, H.* Sampling theorem of stationary stochastic variables in multidimensional spaces [Text] / H. Miykawa // J. Inst. Elec. Comm. Eng. (Japan). — 1959. — № 42. — P. 111–117.
- [11] *Petersen, D. P.* Sampling and reconstruction of wave-number limited functions in N-dimensional Euclidean spaces [Text] / D. P. Petersen, D. Middleton // Inform. And Contr. — 1962. — № 5. — P. 81–104.