УДК 621.313
Н 74

ОСОБЕННОСТИ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Н. Новогрецкий, ассистент

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. Рассмотрены особенности анализа статической устойчивости электроэнергетических систем. Предложен алгоритм расчета коэффициентов характеристического уравнения системы. Представлены фрагмент программы и результаты исследования устойчивости работы синхронного генератора на активно-индуктивную нагрузку. Алгоритм обладает простотой и высокой точностью.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, статическая устойчивость, характеристическое уравнение.

Анотація. Розглянуто особливості аналізу статичної стійкості електроенергетичних систем. Запропоновано алгоритм розрахунку коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Представлено фрагмент програми і результати дослідження стійкості роботи синхронного генератора на активно-індуктивне навантаження. Алгоритм відрізняється простотою та високою точністю.

Ключові слова: електроенергетична система, статична стійкість, характеристичне рівняння.

Abstract. The particularities of the steady-state stability analysis of electrical power systems are examined. The calculation algorithm of the system characteristic equation coefficients is proposed. The programs fragment and the stability analysis results of the synchronous generator operations on actively-inductive load are presents. The algorithm possesses the simplicity and high accuracy.

Keywords: electrical power system, steady-state stability, characteristic equation.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Общим методом решения задач статической устойчивости электроэнергетических систем является метод первого приближения А.М. Ляпунова [1], в соответствии с которым нелинейные дифференциальные уравнения системы линеаризуются, далее по матрице состояния системы определяются коэффициенты характеристического уравнения и проводится анализ корней последнего. Как указано в [2], существенной трудностью в подобном подходе является расчет коэффициентов с высокой точностью. Для сложных энергосистем коэффициенты уравнения отличаются на несколько десятков порядков, поэтому, как показано в [2], применение методов, связанных с многократными преобразованиями исходной матрицы состояния (метод неопределенных коэффициентов, метод Леверье-Фадеева, метод Данилевского), в общем случае приводит к значительной погрешности.

ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ является описание алгоритма определения с высокой точностью коэффициентов характеристического уравнения электроэнергетической системы.

МАТЕРИАЛЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

После линеаризации дифференциальные уравнения исследуемой электроэнергетической системы можно записать в следующей операторной форме:

$$B(p)\cdot\delta x=[A-pE]\cdot\delta y\cdot C=0,$$

где $B(p)$ — квадратная матрица, характеризующая динамические свойства системы в исследуемом установившемся режиме; δx — вектор вариации режимных параметров системы; A — матрица состояния системы; E — единичная матрица; p — оператор Лапласа; δy — расширенный вектор вариаций режимных параметров; С — прямоугольная матрица связи между векторами δx и δy.

Тогда характеристическое уравнение можно найти как определитель от матрицы $B(p)$:

$$D(p)=\det(B(p))=\det([A-pE]).$$

Матрицу состояния системы A можно определить, если привести исходную систему линеаризованных уравнений к форме Коши, что не всегда удобно. Поэтому более целесообразным является исследование матрицы $B(p)$. В то же время все методы определения характеристического уравнения, изложенные в [2], основаны на исследовании именно матрицы A. Поэтому для исследования матрицы $B(p)$ необходимо применить совсем иной подход.

Запишем общее выражение для определителя n-го порядка:

$$\det B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{bmatrix}=\sum(-1)^{\varepsilon}\, b_{1,\alpha_1}b_{2,\alpha_2}b_{3,\alpha_3}\dots b_{n,\alpha_n}.$$

В правой части — сумма произведений. Каждое такое произведение по определению должно содержать элементы матрицы b_{ij}, расположенные в различных строках и различных столбцах [3]. Это значит, что среди всех первых индексов, как и среди всех вторых, не должно быть одинаковых. Если расположить первые индексы в порядке их возрастания, как это сделано выше, то совокупность вторых индексов образует некоторую перестановку (α_1, α_2, …, α_n) множества чисел от 1 до n. Таким образом, количество всех произведений равно $n!$ и алгоритм их нахождения довольно просто реализуется. Остается вопрос о знаке произведения, который определяется числом ε, т. е. числом инверсий. Вместо множителя $(-1)^{\varepsilon}$ можно подставить знак подстановки signσ, который положителен для четной и отрицателен для нечетной подстановки σ. Для нахождения знака подстановки можно предложить следующий алгоритм:

$$f_1=\mathrm{sign}[(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_2)\dots(\alpha_1-\alpha_n)];$$
$$f_2=\mathrm{sign}[(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\dots(\alpha_2-\alpha_n)];$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{n-1}=\mathrm{sign}[(\alpha_{n-1}-\alpha_n)];$$
$$\mathrm{sign}\,\sigma=f_1\ f_2\dots f_{n-1}.$$

Таким образом, создать алгоритм вычисления модуля матрицы любого порядка не составляет труда, но остается вопрос учета символа p, который характеризует оператор Лапласа.

Положим, каждый элемент матрицы $B(p)$ является полиномом первой степени. Тогда матрицу $B(p)$ можно представить в следующем виде:

$$B(p)=G+p\cdot Q;\ \ b(p)_{ij}=g_{ij}+p\cdot q_{ij} \quad (1)$$

где G и Q — квадратные матрицы, элементы которых (g_{ij} и q_{ij}) не содержат параметр p.

Пусть необходимо найти произведение

$$Z(p)=b(p)_{1,\alpha_1}b(p)_{2,\alpha_2}b(p)_{3,\alpha_3}\dots b(p)_{n,\alpha_n}.$$

Очевидно, что в результате будет получен полином n-й степени

$$Z(p)=z_{n+1}p^n+z_np^{n-1}+z_{n-1}p^{n-2}+\dots+z_{j+1}p^j+\dots+z_1.$$

Примем изначально следующие значения коэффициентов этого полинома:

$$z_1 = g_{1,\alpha_1},\ z_2 = q_{1,\alpha_1}, ..., z_i = 0,$$

где $i = 3, 4 \ldots n + 1$

Тогда при последовательном перемножении множителей на промежуточном шаге m получим полином, коэффициенты которого будут определяться выражением

$$z(m)_{j+1} = z(m-1)_{j+1} \cdot g_{m,\alpha_m} + z(m-1)_j \cdot q_{m,\alpha_m},$$

где $z(m)_j$ — j-й коэффициент полинома $Z(p)$ на промежуточном шаге перемножения m; $z(m–1)j$ — j-й коэффициент полинома $Z(p)$ на предыдущем шаге перемножения.

Таким образом, определив по приведенному алгоритму n! таких полиномов и сложив их с учетом знака инверсии, получим характеристическое уравнение системы. При этом нет необходимости приводить линеаризованные уравнения к форме Коши, а исходная матрица не претерпевает ни единого преобразования, что значительно увеличивает точность определения коэффициентов характеристического уравнения.

В качестве примера рассмотрим случай одиночной работы неявнополюсного синхронного генератора на статическую активно-индуктивную нагрузку.

Уравнения Парка-Горева для синхронного генератора одноосного возбуждения и нагрузки можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e_{af} - x_a i_d) + x_a i_q \omega - r_a i_d = U_d = U \sin(\Theta);\\
&-\frac{d}{dt}(x_a i_q) + (e_{af} - x_a i_d)\omega - r_a i_q = U_q = U \cos(\Theta);\\
&T_{d0}\frac{d}{dt}(e_{af} - (x_a - x'_a) i_d) + e_{af} = U_f; \quad T_j \frac{d\omega}{dt} + i_q e_{af} = M_m;\\
&U_d = r_{\text{н}} i_d + x_{\text{н}} \frac{d}{dt} i_d - x_{\text{н}} i_q\ \omega;\\
&U_q = r_{\text{н}} i_q + x_{\text{н}} \frac{d}{dt} i_q + x_{\text{н}} i_d\ \omega,
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где M_m — механический момент, создаваемый приводным двигателем; $x_{\text{н}}$ и $r_{\text{н}}$ — индуктивное и активное сопротивление нагрузки; все остальные параметры имеют общепринятое обозначение [4].

Положим, что механический момент и напряжение возбуждения изменяются по следующему закону

$$\left.\begin{aligned}
&U_f = U_{f\text{хх}} + k_u (U_{\text{з}} - U);\\
&M_m = k_\omega (\omega_{\text{хх}} - \omega).
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $U_{f\text{хх}}$ и $\omega_{\text{хх}}$ — напряжение возбуждения и частота вращения на холостом ходу; $U_{\text{з}}$ — заданное напряжение якоря генератора; k_u и k_ω — коэффициенты усиления соответствующих обратных связей.

Линеаризуем и представим в операторной форме уравнения (2) и (3):

$$\left.\begin{aligned}
&-(x_a p + r_a)\delta i_d + x_a \omega_{\text{н}} \delta i_q + p\delta e_{af} + x_a i_{q\text{н}} \delta\omega =\\
&= U_{\text{н}} \cos(\Theta_{\text{н}})\delta\Theta + \sin(\Theta_{\text{н}})\delta U;\\
&-x_a \omega_{\text{н}} \delta i_d - (x_a p + r_a)\delta i_q + \omega_{\text{н}} \delta e_{af} + (e_{af\text{н}} - x_a i_{d\text{н}})\delta\omega =\\
&= \cos(\Theta_{\text{н}})\delta U - U_{\text{н}} \sin(\Theta_{\text{н}})\delta\Theta;\\
&(T_{d0}\, p + 1)\delta e_{af} - T_{d0}(x_a - x'_a)\, p\delta i_d = -k_u \delta U;\\
&T_j\, p\delta\omega + e_{af\text{н}} \delta i_q + i_{q\text{н}} \delta e_{af} + k_\omega\, \delta\, \omega = 0;\\
&(x_{\text{н}} p + r_{\text{н}})\delta\, i_d - x_{\text{н}} \omega_{\text{н}} \delta i_q - x_{\text{н}} i_{q\text{н}} \delta\omega = U_{\text{н}} \cos(\Theta_{\text{н}})\delta\Theta + \sin(\Theta_{\text{н}})\delta U;\\
&(x_{\text{н}} p + r_{\text{н}})\delta\, i_q + x_{\text{н}} \omega_{\text{н}} \delta i_d + x_{\text{н}} i_{d\text{н}} \delta\omega = \cos(\Theta_{\text{н}})\delta U - U_{\text{н}} \sin(\Theta_{\text{н}})\delta\Theta.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Здесь индекс «н» указывает на соответствие данного параметра начальному установившемуся режиму, относительно которого рассматриваются малые колебания δ этих параметров. Систему (4) можно представить в матричной форме:

$$B(p)\ \delta x = (G + p \cdot Q)\delta x = 0;$$
$$\delta x = \text{colon}(\delta i_d,\quad \delta i_q,\quad \delta e_{af},\quad \delta U,\quad \delta\Theta,\quad \delta\omega);$$

$$G = \begin{vmatrix} -r_a & \omega_{\text{н}} x_a & 0 & -\sin\Theta & -U_{\text{н}}\cos\Theta & x_a i_{q\text{н}} \\ \omega_{\text{н}} x_a & r_a & -\omega_{\text{н}} & \cos\Theta & -U_{\text{н}}\sin\Theta & (x_a i_{d\text{н}} - e_{af\text{н}}) \\ 0 & 0 & 1 & k_u & 0 & 0 \\ 0 & e_{af\text{н}} & i_{q\text{н}} & 0 & 0 & k_\omega \\ r_{\text{н}} & -\sigma_{\text{н}} x_{\text{н}} & 0 & -\sin\Theta & -U_{\text{н}}\cos\Theta & -x_{\text{н}} i_{q\text{н}} \\ -\omega_{\text{н}} x_{\text{н}} & -r_{\text{н}} & 0 & \cos\Theta & -U_{\text{н}}\sin\Theta & -x_{\text{н}} i_{d\text{н}} \end{vmatrix};$$

$$Q = \begin{vmatrix} -x_a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_{d0}(x_a - x'_a) & 0 & T_{d0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_j \\ x_{\text{н}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{\text{н}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ниже представлен фрагмент программы, написанный на языке Pascal, который позволяет рассчитать коэффициенты характеристического уравнения из полученной матрицы $B(p)$:

```
for i1:=1 to 7 do
begin
Z1[i1]:=0; Z2[i1]:=0; Z3[i1]:=0; Z[i1]:=0;
end;
for i1:=1 to 6 do
begin
Z1[1]:=G[1,i1]; Z1[2]:=Q[1,i1];
for i2:=1 to 6 do
begin
if i2=i1 then goto m1;
for j:=1 to 7 do
if j>1 then Z2[j]:=(Z1[j]*G[2,i2]+Z1[j-1]*Q[2,i2])
else Z2[j]:=Z1[j]*G[2,i2];
for i3:=1 to 6 do
begin
if i3=i2 then goto m2;
if i3=i1 then goto m2;
for j:=1 to 7 do
if j>1 then Z3[j]:=(Z2[j]*G[3,i3]+Z2[j-1]*Q[3,i3])
else Z3[j]:=Z2[j]*G[3,i3];
for i4:=1 to 6 do
begin
if i4=i3 then goto m3;
if i4=i2 then goto m3;
if i4=i1 then goto m3;
for j:=1 to 7 do
if j>1 then Z4[j]:=(Z3[j]*G[4,i4]+Z3[j-1]*Q[4,i4])
else Z4[j]:=Z3[j]*G[4,i4];
for i5:=1 to 6 do
begin
if i5=i4 then goto m4;
if i5=i3 then goto m4;
if i5=i2 then goto m4;
if i5=i1 then goto m4;
for j:=1 to 7 do
if j>1 then Z5[j]:=(Z4[j]*G[5,i5]+Z4[j-1]*Q[5,i5])
else Z5[j]:=Z4[j]*G[5,i5];
for i6:=1 to 6 do
begin
if i6=i5 then goto m5;
if i6=i4 then goto m5;
if i6=i3 then goto m5;
if i6=i2 then goto m5;
if i6=i1 then goto m5;
for j:=1 to 7 do
if j>1 then Z6[j]:=(Z5[j]*G[6,i6]+Z5[j-1]*Q[6,i6])
else Z6[j]:=Z5[j]*G[6,i6];
F[1]:=(i2-i1)*(i3-i1)*(i4-i1)*(i5-i1)*(i6-i1);
F[2]:=(i3-i2)*(i4-i2)*(i5-i2)*(i6-i2)*F[1]/abs(F[1]);
F[3]:=(i4-i3)*(i5-i3)*(i6-i3)*F[2]/abs(F[2]);
F[4]:=(i5-i4)*(i6-i4)*F[3]/abs(F[3]);
F[5]:=(i6-i5)*F[4]/abs(F[4]);
if F[5]>0 then for j:=1 to 7 do Z[j]:=(Z[j]+Z6[j])
else for j:=1 to 7 do Z[j]:=(Z[j]-Z6[j]);
m5: end;
m4: end;
m3: end;
m2: end;
m1: end;
end;
```

В представленном отрывке программы матрицы G и Q связаны с матрицей $B(p)$ уравнением (1), пятый элемент вектора F определяет знак инверсии, а вектор Z по окончанию процедуры содержит коэффициенты характеристического уравнения.

С помощью представленной программы была рассмотрена система со следующими параметрами генератора, нагрузки и установившегося режима: $r_а = 0{,}013$ о.е.; $x_d = 2$ о.е.; $x'_d = 0{,}2$ о.е.; $T_{d0} = 1000$ рад; $T_j = 2000$ рад.; $k_u = 20$ о.е.; $k_\omega = 20$ о.е.; $r_н = 0{,}8$ о.е.; $x_н = 0{,}6$ о.е.; $\sin(\Theta_н) = 0{,}584$; $\cos(\Theta_н) = 0{,}811$; $i_{dн} = 0{,}954$ о.е.; $i_{qн} = 0{,}298$ о.е.; $e_{afн} = 2{,}72$ о.е.; $\omega_н = 1$ о.е.; $U_н = 1$ о.е. В результате расчета получены следующие коэффициенты характеристического уравнения:

Z[1]:= –1.15693E+03; Z[2]:= –1.79050E+05;
Z[3]:= –5.63186E+06; Z[4]:= –5.69455E+06;
Z[5]:= – 4.19647E+06; Z[6]:= 0; Z[7]:= 0.

Время расчета составило несколько секунд. Но для матриц более высокого порядка резко возрастает количество математических операций, а значит, и расчетное время. Так, при исследовании параллельной работы двух генераторов продольно-поперечного возбуждения на активно-индуктивную нагрузку матрица $B(p)$ имела четырнадцатый порядок и время расчета уже достигало нескольких минут.

Точность расчета была проверена с помощью программного обеспечения MathCAD, которое имеет встроенные функции, позволяющие находить в символьном виде определитель матрицы $B(p)$ и выделять коэффициенты характеристического полинома. В результате были получены коэффициенты, идентичные рассчитанным ранее, что говорит о высокой точности рассмотренного алгоритма.

ВЫВОД

Разработанный алгоритм определения коэффициентов характеристического уравнения электроэнергетической системы обладает высокой точностью и простотой реализации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Жданов П.С.* Вопросы устойчивости электроэнергетических систем / Под ред. Л.А. Жукова. — М.: Энергия, 1979. — 456 с.

[2] *Филиппова Н.В., Тузлукова Е.В.* Модальный анализ устойчивости энергосистем: критерии статической устойчивости и локализации собственных значений // Электричество. — 2004. — № 11. — С. 2–15.

[3] *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера — К.: Техніка, 1975. — 768 с.

[4] *Веретенников Л.П.* Исследование процессов в судовых электроэнергетических системах. Теория и методы. — Л.: Судостроение, 1975. — 376 с.