УДК 519.622.2: 629.5.052.7
Д 40

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

М. В. Джангиров, магистр, преп. каф. морского приборостроения;
А. П. Еременко, магистр, ст. преп. каф. морского приборостроения;
А. К. Снигур, доц. каф. морского приборостроения

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. Рассмотрена методика определения погрешностей алгоритмов интегрирования кинематических уравнений, основанная на сравнении эталонного аналитического решения для частного случая движения объекта и численного решения для алгоритмов до пятого порядка включительно.

Ключевые слова: кватернионы, параметры Родрига-Гамильтона, алгоритмы бесплатформенные инерциальные навигационные системы, коническое движение.

Анотація. Розглянута методика визначення похибок алгоритмів інтегрування кінематичних рівнянь, заснована на порівнянні еталонного аналітичного розв'язку для окремого випадку руху об'єкта і числового розв'язку для алгоритмів до п'ятого порядку включно.

Ключові слова: кватерніони, параметри Родріга-Гамільтона, алгоритми, безплатформні інерціальні навігаційні системи, конічний рух.

Abstract. The method of kinematical equation integration algorithm error determination, based on comparison of standard analytical solution for the special case of object motion and numerical solution for algorithms to the fifth order is considered.

Keywords: quaternions, Rodrigues-Hamilton parameters, strapdown inertial navigation system algoritms

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При проектировании бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) необходимо проводить обоснованный выбор алгоритмов функционирования системы. Основным элементом алгоритмического обеспечения БИНС является алгоритм численного интегрирования кинематических уравнений. Выбор этого алгоритма влияет на метрологические характеристики бесплатформенной инерциональной навигационной системы, и для его обоснования необходимо определять погрешность, возникающую при интегрировании кинематических уравнений в самом алгоритме.

Анализ погрешностей алгоритмов для наиболее распространенной формы представления кинематических параметров объекта — кватернионов представлен в [1, 2]. Однако в этих работах не рассмотрены подробно выражения для определения глобальной погрешности алгоритмов.

ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ является разработка методики определения локальной и глобальной погрешностей алгоритмов численного интегрирования кинематических уравнений для случаев движения объекта, допускающих аналитическое решение; – вращения с постоянной угловой скоростью, конического движения.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

При составлении алгоритмов интегрирования кинематических уравнений часто используются параметры Родрига-Гамильтона (компоненты кватернионов) или параметры Эйлера. Полученные кинематические уравнения могут быть легко преобразованы из одних параметров в другие [1, 4].

Точное решение кинематических уравнений в общем случае не может быть выражено в элементарных функциях для произвольного движения, что характерно для большинства подвижных объектов. Поэтому на практике приходится использовать приближенные методы, моделирование на ЭВМ и численное интегрирование.

Аналитическое решение кинематических уравнений позволяет сравнить результаты численного интегрирования с точными результатами, получаемыми при рассмотрении следующих частных случаев движения твердого тела:

при вращении вдоль одной оси с постоянной угловой скоростью

$$\omega_x = c = \text{const},\ \omega_y = \omega_z = \text{const},$$

при вращениях вдоль трех осей с постоянной угловой скоростью

$$\omega_x = c = \text{const},\ \omega_y = a = \text{const},\ \omega_z = b = \text{const},$$

при коническом движении (коническая прецессия, вектор угловой скорости вращается по круговому конусу вокруг некоторой оси)

$$\omega_x = c,\ \omega_y = a\cos bt,\ \omega_z = a\sin bt,\ a, b, c = \text{const},$$

Выберем начальные условия кинематических уравнений движения объекта

$$\Lambda(t_O) = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T, \qquad (1)$$

где Λ — кватернион ориентации объекта.

Поскольку вращение вдоль трех осей — более общий случай движения, чем вращение вдоль одной оси, рассмотрим аналитическое решение кинематических уравнений при $\omega = [0\ c\ a\ b]_T$ с начальными условиями (1):

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(t) &= \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_1(t) &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_2(t) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_3(t) &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right).
\end{aligned} \qquad (2)$$

При $a=b=0$ выражения (2) соответствуют решению для вращения вдоль одной оси.

Рассмотрим коническое движение вдоль оси x, когда $\omega_x = c$, $\omega_y = a\cos bt$, $\omega_z = a\sin bt$. Система кинематических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(t) &= \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_1(t) &= \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_2(t) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right);\\
\Lambda_3(t) &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}t\right).
\end{aligned}$$

решение ее для начальных условий (1) представлено в [3]:

$$\Lambda_0(t) = \left(1 + \frac{(c+b) - \sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\cos\left(\left[-\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right) -$$

$$-\left(\frac{(c+b) - \sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\cos\left(\left[-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right),$$

$$\Lambda_1(t)=\left(1+\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\sin\left(\left[-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right)-$$
$$-\left(\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\sin\left(\left[-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right),$$
$$\Lambda_2(t)=\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{a}\left(1+\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\sin\left(\left[-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right)-$$
$$-\frac{(c+b)+\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{a}\left(\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\sin\left(\left[-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right), \qquad (3)$$
$$\Lambda_3(t)=\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{a}\left(1+\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\cos\left(\left[-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right)-$$
$$-\frac{(c+b)+\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{a}\left(\frac{(c+b)-\sqrt{(c+b)^2+a^2}}{2\sqrt{(c+b)^2+a^2}}\right)\cos\left(\left[-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2+a^2}\right]t\right).$$

Кинематические уравнения в связанном и инерциальном базисах соответственно имеют вид

$$\frac{d\Lambda^*}{dt}=\frac{1}{2}\Lambda^*\circ\omega_E; \qquad (4)$$

$$\frac{d\Lambda^*}{dt}=\frac{1}{2}\omega_I\circ\Lambda^*. \qquad (5)$$

где Λ^* — кватернион ориентации объекта, ω_E — угловая скорость в связанном базисе; ω_I — угловая скорость в инерциальном базисе; «$\circ$» — операция перемножения кватернионов.

В работе [1] выполнены построение и анализ численных методов интегрирования кинематических уравнений (4). Поскольку кинематические уравнения в инерциальном базисе (5) сходны с (4), анализ численных методов интегрирования этих уравнений выполняется аналогично.

В [1] показано, что общее решение уравнения (4) может быть выражено через частное решение с единичными начальными условиями. Этот же результат можно получить путем представления движения объекта на интервале $[t_O, t]$ в виде кватерниона $N(t)$, такого, что

$$\Lambda(t)=\Lambda(t_O)\circ N(t). \qquad (6)$$

Интегрируя (4) почленно, получаем

$$\Lambda(t)=\Lambda(t_O)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(t')\circ\omega_E(t)\,dt'. \qquad (7)$$

Подставляя соотношение (6) в равенство (7), находим

$$N(t)=1+\frac{1}{2}\int N(t')\circ\omega_E(t')\,dt'. \qquad (8)$$

Таким образом, $N(t)$ удовлетворяет кинематическому уравнению (4) с начальным условием $N(t_O)=1$.

Для построения алгоритма численного интегрирования примем в соотношении (6)

$$t_O=t_{n-1},\ t=t_n=t_{n-1}+h,$$

где h — шаг интегрирования, тогда

$$\Lambda_n=\Lambda_{n-1}\circ N_n.$$

В данной формуле приняты обозначения:

$$\Lambda_n=\Lambda(t_n);\ N_n=N(t_n).$$

Точное решение уравнения (8) может быть построено методом Пикара как

$$N(t)=1+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\omega_E(t')\,dt'+\frac{1}{4}\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t}\omega_E(t'')\,dt''\right]\circ\omega_E(t')\,dt'+\ldots \qquad (9)$$

Предположим, что вектор угловой скорости объекта $\omega=\mathbf{i}\omega_x+\mathbf{j}\omega_y+\mathbf{k}\omega_z$ на интервале шага интегрирования можно представить в виде полинома четвертой степени

$$\omega(\tau) = \omega_O + 2\varepsilon\tau + 3\mathbf{a}\tau^2 + 4\mathbf{b}\tau^3 + 5\mathbf{c}\tau^4,$$

где $\tau \in [0;\ 1]$, ω_O, $\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — постоянные векторы, значение которых на каждом шаге интегрирования определяется путем полиномиального интерполирования по значениям угловой скорости на предыдущих шагах. Для построения алгоритмов численного интегрирования с точностью не более пятого порядка малости относительно величины шага интегрирования оставляем в выражении (9) величины соответствующего порядка малости:

для первого порядка

$$N_n^{(1)} = 1 + \frac{1}{2}\omega_O h;$$

для второго порядка

$$N_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}\omega_O h + \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{4}\|\omega_O\|\right)h^2;$$

для третьего порядка

$$N_n^{(3)} = 1 + \frac{1}{2}\omega_O h + \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{4}\|\omega_O\|\right)h^2 + $$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \frac{1}{6}\left(-3\omega_O \cdot \varepsilon + \omega_O \times \varepsilon\right) - \frac{1}{24}\|\omega_O\|\omega_O\right)h^3.$$

для четвертого порядка

$$N_n^{(4)} = 1 + \frac{1}{2}\omega_O h + \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{4}\|\omega_O\|\right)h^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \frac{1}{6}\left(-3\omega_O \cdot \varepsilon + \omega_O \times \varepsilon\right) - \frac{1}{24}\|\omega_O\|\omega_O\right)h^3 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{b} + \frac{1}{4}\left(-2\omega_O \cdot \mathbf{a} + \omega_O \times \mathbf{a} - \|\omega_O\|\right) - \frac{1}{24}\left[\|\omega_O\|\varepsilon + 2(\omega_O \cdot \varepsilon)\omega_O\right] + \frac{1}{192}\|\omega_O\|^2\right)h^4.$$

для пятого порядка

$$N_n^{(5)} = 1 + \frac{1}{2}\omega_O h + \frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{4}\|\omega_O\|\right)h^2 + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \frac{1}{6}\left(-3\omega_O \cdot \varepsilon + \omega_O \times \varepsilon\right) - \frac{1}{24}\|\omega_O\|\omega_O\right)h^3 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{b} + \frac{1}{4}\left(-2\omega_O \cdot \mathbf{a} + \omega_O \times \mathbf{a} - \|\varepsilon\|\right) - \frac{1}{24}\left[\|\omega_O\|\varepsilon + 2(\omega_O \cdot \varepsilon)\omega_O\right] + \frac{1}{192}\|\omega_O\|^2\right)h^4 +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{c} + \frac{1}{10}\left(-5\omega_O \cdot \mathbf{b} + 3\omega_O \times \mathbf{b} - 5\varepsilon \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \times \mathbf{a}\right) - \frac{1}{120}[6\|\omega_O\|\mathbf{a} + 8(\omega_O \cdot \varepsilon)\varepsilon +\right.$$
$$+7\|\varepsilon\|\omega_O + 9(\omega_O \cdot \mathbf{a})\omega_O] + \frac{1}{240}\left[5\|\omega_O\|(\omega_0 \cdot \varepsilon) - \|\omega_O\|(\omega_O \times \varepsilon)\right] +$$
$$\left.+\frac{1}{1920}\|\omega_O\|^2\omega_O\right)h^5.$$

где $\|\omega_O\|$ — норма кватерниона ω_O; $\|\omega_O\| = \omega_{Ox}^2 + \omega_{Oy}^2 + \omega_{Oz}^2$, $\|\varepsilon\| = \varepsilon_{Ox}^2 + \varepsilon_{Oy}^2 + \varepsilon_{Oz}^2$, $\|\omega_O\|^2 = \|\omega_O\| \cdot \|\omega_O\|$, $x \cdot y$ — скалярное произведение величин x и y; $x \times y$ — векторное произведение величин x и y.

Обозначим через $\Delta\Lambda_n$ разность между значениями кватерниона, вычисленными по приближенным Λ^*_n и точным Λ_n формулам:

$$\Delta\Lambda_n = \Lambda_n^* - \Lambda_n,$$

Учитывая, что

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ N_n \text{ и } \Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ N_n,$$

и полагая, что предыдущее значение Λ^*_{n-1} было точным, имеем

$$\Delta\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \delta N_n,$$

где $\delta N_n^{(k)} = N_n^{(k)} - N_n$ — погрешность на шаге интегрирования; k — порядок алгоритма.

Локальная погрешность для различных численных методов:

для первого приближения

$$\delta N_n^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon - \frac{1}{4}\|\omega_O\|^2\right)h^2;$$

для второго приближения

$$\delta N_n^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \frac{1}{6}\left(-3\omega_O \cdot \varepsilon + \omega_O \times \varepsilon\right) - \frac{1}{24}\|\omega_O\|^2\omega_O\right)h^3;$$

для третьего приближения

$$\delta N_n^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{b} + \frac{1}{4}\left(-2\omega_O \cdot \mathbf{a} + \omega_O \times \mathbf{a} - \|\varepsilon\|^2\right) - \frac{1}{24}\left[\|\omega_O\|^2 \varepsilon + 2(\omega_O \cdot \varepsilon)\omega_O\right] + \frac{1}{192}\|\omega_O\|^4\right)h^4;$$

для четвертого приближения

$$\delta N_n^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{c} + \frac{1}{10}\left(-5\omega_O \cdot \mathbf{b} + 3\omega_O \times \mathbf{b} - 5\varepsilon \cdot \mathbf{a} + \varepsilon \times \mathbf{a}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{120}\left[6\|\omega_O\|^2 \mathbf{a} + 8(\omega_O \cdot \varepsilon)\varepsilon + 7\|\varepsilon\|^2 \omega_O + 9(\omega_O \cdot \mathbf{a})\omega_O\right] +$$
$$\left. + \frac{1}{240}\left[5\|\omega_O\|^2 (\omega_O \cdot \varepsilon) - \|\omega_O\|^2 (\omega_O \times \varepsilon)\right] + \frac{1}{1920}\|\omega_O\|^4 \omega_O\right)h^5.$$

Погрешность метода пятого порядка определим как погрешность, связанную с отбрасыванием величин шестого порядка:

$$\delta N_n^{(5)} = \frac{1}{6}(5\varepsilon \circ \mathbf{c} + 4\mathbf{a} \circ \mathbf{b} + 3\mathbf{b} \circ \mathbf{a} + 2\mathbf{c} \circ \varepsilon)h^6 + \frac{1}{3}(\omega_O \circ \omega_O \circ \mathbf{b})h^6 +$$
$$+ \frac{1}{6}(2\omega_O \circ \varepsilon + \varepsilon \circ \omega_O) \circ \mathbf{a}h^6 + \frac{1}{12}(3\omega_O \circ \mathbf{a} + 2\varepsilon \circ \varepsilon + \mathbf{a} \circ \omega_O) \circ \varepsilon h^6 +$$
$$+ \frac{1}{30}(4\omega_O \circ \mathbf{b} + 3\varepsilon \circ \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \circ \varepsilon + \mathbf{b} \circ \omega_O) \circ \omega_O h^6 + \frac{1}{30}((2\omega_O \circ \varepsilon + \varepsilon \circ \omega_O) \circ \omega_O) \circ \varepsilon h^6 +$$
$$+ \frac{2}{75}((2\omega_O \circ \varepsilon + \varepsilon \circ \omega_O) \circ \varepsilon) \circ \omega_O h^6 + \frac{1}{100}((3\omega_O \circ \mathbf{a} + 2\varepsilon \circ \varepsilon + \mathbf{a} \circ \omega_O) \circ \omega_O) \circ \omega_O h^6 +$$
$$+ \frac{1}{90}(\omega_O \circ \omega_O \circ \omega_O \circ \varepsilon \circ \omega_O)h^6 + \frac{1}{120}(\omega_O \circ \omega_O \circ \varepsilon \circ \omega_O \circ \omega_O)h^6 +$$
$$+ \frac{1}{360}((2\omega_O \circ \varepsilon + \varepsilon \circ \omega_O) \circ \omega_O) \circ \omega_O \circ \omega_O h^6.$$

Явные выражения для глобальной погрешности алгоритма интегрирования кинематических уравнений можно получить при известном эталонном решении, найденном аналитически (уравнения (2), (3)). Рассмотрим методику определения глобальной погрешности для случая вращения объекта вдоль одной оси с постоянной угловой скоростью при условии, что интегрирование кинематических уравнений производится методом Эйлера:

$$\Lambda_{\text{пр}}(t_1) = \Lambda(t_0) \circ N(t_1) = \Lambda(t_0) \circ \left(1 + \frac{1}{2}\omega_0 h\right) = \Lambda(t_0) + \frac{1}{2}\Lambda(t_0) \circ \omega_0 h;$$
$$\Lambda_{\text{пр}}(t_2) = \Lambda_{\text{пр}}(t_1) \circ N(t_2) = \Lambda(t_0) + \Lambda(t_0) \circ \omega_0 h - \frac{1}{4}\Lambda(t_0) \cdot \|\omega_O\| h^2;$$
$$\Lambda_{\text{пр}}(t_3) = \Lambda_{\text{пр}}(t_2) \circ N(t_3) = \Lambda(t_0) + \frac{3}{2}\Lambda(t_0) \circ \omega_0 h - \frac{3}{4}\Lambda(t_0) \cdot \|\omega_O\| h^2 - \frac{1}{8}\Lambda(t_0) \circ \omega_0 \cdot \|\omega_O\| h^3;$$
$$\ldots$$
$$\Lambda_{\text{пр}}(t_i) = \Lambda_{\text{пр}}(t_{i-1}) \circ N(t_i).$$

Здесь t_0, t_1, t_2 — последовательные моменты времени, соответствующие шагам интегрирования; $N(t_i) = \left(1 + \frac{1}{2}\omega_0 h\right)$ — приращение кватерниона угловой скорости вращения объекта.

Таким образом, для определения глобальной погрешности на момент t_i необходимо рекурсивно вычислить значения кватерниона ориентации во все предыдущие моменты времени. По мере вычислений необходимо отбрасывать слагаемые, содержащие высокие степени Δt. Целесообразно не учитывать члены порядка, большего, чем пятый. Для исследования других методов интегрирования кинематических уравнений необходимо в приведенных выше выражениях изменить выражение для $N(t_i)$. Глобальная погрешность находится как разность эталонного значения кватерниона ориентации и его расчетного значения, получаемого численным методом.

ВЫВОДЫ

1. Полученные выражения локальной и глобальной погрешностей алгоритмов численного интегрирования кинематических уравнений позволяют исследовать алгоритмы различных порядков в частных случаях движения объекта, для которых имеется аналитическое решение. Данные формулы могут быть легко реализованы в специализированных прикладных программных пакетах.

2. Используемая методика определения погрешностей алгоритмов не учитывает погрешности инерциальных датчиков, а также эффекты квантования и ограничения разрядной сетки. Несмотря на это, она может быть применена при выборе алгоритма интегрирования кинематических уравнений в процессе проектирования бесплатформенных инерциальных навигационных систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. — М.: Наука, 1992. — 280 с.

[2] *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973. — 320 с.

[3] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — СПб.: Лань, 2003. — 576 с.

[4] *Снигур А.К., Джангиров М.В., Еременко А.П.* Анализ алгоритмов решения кинематических уравнений БИНС // Міжнар. наук.-техн конф. «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2008»: Тези доп. — Х.: Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», 2008. — Т. 2. — С. 28-31.