УДК 515.2
У 79

ПОБУДОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КРИВИНИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ КРИВОЛІНІЙНИХ ОБВОДІВ

С. А. Устенко, доц., канд. техн. наук

Національний університет кораблебудування, м. Миколаїв

Анотація. Запропоновано методику побудови інтерполяційних елементів кривини для геометричного моделювання плоских криволінійних обводів.

Ключові слова: елемент кривини, лінійний елемент кривини, інтерполяційний елемент кривини, криволінійний обвід, геометричне моделювання.

Аннотация. Предложена методика построения интерполяционных элементов кривизны для геометрического моделирования плоских криволинейных обводов.

Ключевые слова: элемент кривизны, линейный элемент кривизны, интерполяционный элемент кривизны. криволинейный обвод, геометрическое моделирование

Abstract. The method of construction of elements of interpolations of curvature is offered for the geometrical design of plane curvilinear profiles.

Keywords: element of curvature, linear element of curvature, interpolation element of curvature, curvilinear profiles, geometrical modeling.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

При геометричному моделюванні криволінійних обводів елементів проточних частин турбомашин різного конструктивного оформлення виникають задачі, коли криві лінії треба провести не через дві точки, а через деяку їх сукупність. При цьому як додаткові умови задаються кути нахилу дотичних до майбутньої кривої в крайніх точках сукупності, а також умови забезпечення заданої кривини.

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Геометричному моделюванню плоских криволінійних обводів за заданим розподілом їх кривини в літературі приділено достатньо уваги. Різні аспекти цього питання висвітлені в роботах [3, 6].

МЕТОЮ СТАТТІ є розробка методики побудови інтерполяційних елементів кривини для геометричного моделювання плоских криволінійних обводів. Робота є продовженням досліджень, що проводяться в Національному університеті кораблебудування стосовно геометричного моделювання плоских криволінійних обводів аеродинамічних об’єктів із заданим розподілом кривини [1, 2, 4, 5].

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянемо геометричне моделювання криволінійних обводів, що проходять через задану сукупність точок і мають задані кути нахилу дотичних у крайніх точках сукупності.

Для побудови плоского криволінійного обводу використаємо елементи кривини, запропоновані в роботах [1, 2, 4, 5]. У цьому випадку можна скористатися двома підходами. У першому взяти елемент кривини

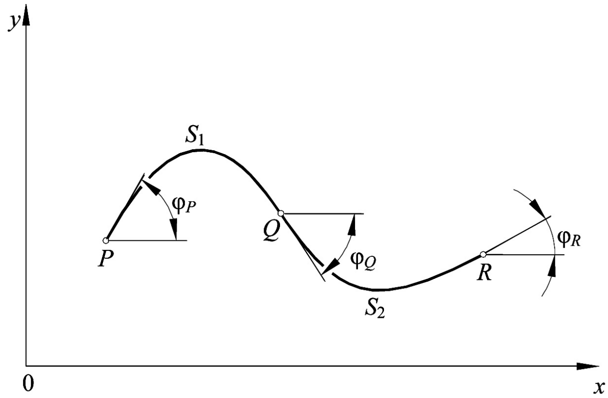

Рис. 1. Розташування точок для з'єднання ділянок криволінійних обводів

більш високого порядку, ніж ті, що були розглянуті в роботах, але в цьому випадку не можна гарантувати збіжність обчислювального процесу, оскільки зросте кількість рівнянь та степінь поліномів в інтегралах Френеля. У другому способі дві сусідні точки сукупності можна з'єднувати кривими, які побудовані із застосуванням лінійних елементів кривини, але при умові, що в точках їх стику буде однаковий кут нахилу дотичної до отриманих кривих.

Для розв'язання поставленої задачі виберемо другий спосіб. Спочатку розглянемо задачу, коли потрібно з'єднати попарно три точки кривими лініями, забезпечивши при цьому однаковий кут нахилу дотичної в середній точці (показано на рисунку). Застосуємо для побудови ділянок криволінійних обводів лінійні елементи кривини.

Як випливає з матеріалів роботи [2], для однозначного задання лінійного елемента кривини потрібно задати два коефіцієнти, а для задання кривої із застосуванням лінійного елемента кривини — довжину дуги кривої та координати початкової точки.

Вихідними даними до моделювання будуть: координати трьох точок (P, Q і R) та кути нахилу дотичних до кривої φ_P та φ_R в точках P і R.

Підставимо до параметричних рівнянь криволінійного обводу, отриманого із застосуванням лінійного елемента кривини [2], координати точок Q і R та отримаємо чотири вирази:

$$x_Q = x_P + \int_0^{S_1} \cos\left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s\right) ds; \quad x_R = x_Q + \int_0^{S_2} \cos\left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s\right) ds;$$

$$y_Q = y_P + \int_0^{S_1} \sin\left(\varphi_P + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s\right) ds; \quad y_R = y_Q + \int_0^{S_2} \sin\left(\varphi_Q + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s\right) ds,$$

в яких сім невідомих: a_1, b_1, a_2, b_2 — коефіцієнти лінійних елементів кривини для визначення першої та другої ділянок відповідно; S_1, S_2 — довжина першої та другої ділянок; φ_Q — кут нахилу дотичної в точці стику ділянок. Запишемо вирази для знаходження кутів нахилу дотичних до кривої в останніх точках ділянок [2]:

$$\varphi_Q = \varphi_P + \frac{a_1 S_1^2}{2} + b_1 S_1; \tag{1}$$

$$\varphi_R = \varphi_Q + \frac{a_2 S_2^2}{2} + b_2 S_2. \tag{2}$$

У точці стику, крім рівності кутів нахилу дотичної до кривої, потрібно забезпечити ще рівність кривини:

$$a_1S_1 + b_1 = a_2 \cdot 0 + b_2,$$

звідки

$$b_2 = a_1S_1 + b_1, \qquad (3)$$

Підставивши вирази (1) і (3) до (2), отримаємо

$$\varphi_R = \varphi_P + \frac{a_1S_1^2}{2} + \frac{a_2S_2^2}{2} + a_1S_1S_2 + b_1(S_1 + S_2).$$

Виразимо з цієї формули коефіцієнт b_1:

$$b_1 = \frac{\varphi_R - \varphi_P}{S_1 + S_2} - \frac{a_1S_1^2 + a_2S_2^2}{2(S_1 + S_2)} - \frac{a_1S_1S_2}{S_1 + S_2}.$$

Таким чином, отримані вирази для трьох невідомих:

$$b_1 = \frac{\varphi_R - \varphi_P}{S_1 + S_2} - \frac{a_1S_1^2 + a_2S_2^2}{2(S_1 + S_2)} - \frac{a_1S_1S_2}{S_1 + S_2};$$

$$b_2 = a_1S_1 + b_1; \quad \varphi_Q = \varphi_P + \frac{a_1S_1^2}{2} + b_1S_1.$$

Уведемо позначення та запишемо систему з чотирьох рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} x_Q = x_P + \int_0^{S_1} \cos\Phi_1(s)ds; \\ y_Q = y_P + \int_0^{S_1} \sin\Phi_1(s)ds; \\ x_R = x_Q + \int_0^{S_2} \cos\Phi_2(s)ds; \\ y_R = y_Q + \int_0^{S_2} \sin\Phi_2(s)ds, \end{cases}$$

де

$$\Phi_1(s) = \varphi_P + \frac{a_1s^2}{2} + b_1s;$$

$$\Phi_2(s) = \varphi_P + a_1S_1\left(s + \frac{S_1}{2}\right) + \frac{a_2s^2}{2} + b_1(s + S_1).$$

Для розв'язання цієї системи інтегральних рівнянь скористаємось числовим методом Ньютона. Для цього спочатку потрібно знайти частинні похідні рівнянь системи за невідомими a_1, S_1, a_2, S_2:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1} = -\int_0^{S_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial a_1} \sin\Phi_1(s)ds; \quad \frac{\partial f_1}{\partial a_2} = -\int_0^{S_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial a_2} \sin\Phi_1(s)ds;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_1} = \int_0^{S_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial a_1} \cos\Phi_1(s)ds; \quad \frac{\partial f_2}{\partial a_2} = \int_0^{S_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial a_2} \cos\Phi_1(s)ds;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial a_1} = -\int_0^{S_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial a_1} \sin\Phi_2(s)ds; \quad \frac{\partial f_3}{\partial a_2} = -\int_0^{S_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial a_2} \sin\Phi_2(s)ds;$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial a_1} = \int_0^{S_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial a_1} \cos\Phi_2(s)ds; \quad \frac{\partial f_4}{\partial a_2} = \int_0^{S_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial a_2} \cos\Phi_2(s)ds;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S_1} = \frac{1}{S_1} \int_0^{S_1} \left[\cos\Phi_1(s) - \left(S_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial S_1} + s\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right)\sin\Phi_1(s)\right]ds;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S_1} = \frac{1}{S_1} \int_0^{S_1} \left[\sin\Phi_1(s) + \left(S_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial S_1} + s\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right)\cos\Phi_1(s)\right]ds;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_1} = -\int_0^{S_2} \frac{\partial\Phi_2}{\partial S_1} \sin\Phi_2(s)ds; \quad \frac{\partial f_1}{\partial S_2} = -\int_0^{S_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial S_2} \sin\Phi_1(s)ds;$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_1} = \int_0^{S_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_1} \cos \Phi_2(s) ds; \quad \frac{\partial f_2}{\partial S_2} = \int_0^{S_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial S_2} \cos \Phi_1(s) ds;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial S_2} = \frac{1}{S_2} \int_0^{S_2} \left[\cos \Phi_2(s) - \left(S_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_2} + s \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right) \sin \Phi_2(s) \right] ds;$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial S_2} = \frac{1}{S_2} \int_0^{S_2} \left[\sin \Phi_2(s) + \left(S_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_2} + s \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right) \cos \Phi_2(s) \right] ds,$$

де

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} = s\left(\frac{s}{2} + \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \right); \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_1} = S_1\left(s + \frac{S_1}{2} \right) + \frac{\partial b_1}{\partial a_1}(s + S_1);$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial a_2} = s \frac{\partial b_1}{\partial a_2}; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial a_2} = \frac{s^2}{2} + \frac{\partial b_1}{\partial a_2}(s + S_1);$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial S_1} = s \frac{\partial b_1}{\partial S_1}; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_1} = \left(a_1 + \frac{\partial b_1}{\partial S_1} \right)(s + S_1) + b_1;$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial S_2} = s \frac{\partial b_1}{\partial S_2}; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial S_2} = \frac{\partial b_1}{\partial S_2}(s + S_1);$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} = a_1 s + b_1; \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} = a_2 s + a_1 S_1 + b_1;$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial a_1} = -\frac{S_1}{S_1 + S_2}\left(\frac{S_1}{2} + S_2 \right); \quad \frac{\partial b_1}{\partial a_2} = -\frac{S_2^2}{2(S_1 + S_2)};$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial S_1} = \frac{\varphi_P - \varphi_R}{(S_1 + S_2)^2} - \frac{a_1}{2} + \frac{(a_2 - a_1) S_2^2}{2(S_1 + S_2)^2}; \quad \frac{\partial b_1}{\partial S_2} = \frac{\varphi_P - \varphi_R}{(S_1 + S_2)^2} - \frac{a_2 S_2}{2(S_1 + S_2)} - \frac{S_1(a_1 S_1 + a_2 S_2)}{2(S_1 + S_2)^2}.$$

Таким чином, отримано формули та розроблено методику знаходження параметрів лінійних елементів кривини та побудованих на їх основі криволінійних ділянок, що мають загальну точку стику з однаковим кутом нахилу дотичних та кривиною в цій точці.

Перейдемо до задачі з'єднання попарно послідовності точок кривими лініями, заданих лінійними елементами кривини із забезпеченням однакових кутів нахилу дотичних у точках стику. Послідовність лінійних елементів кривини назвемо інтерполяційними елементами кривини.

Вихідними даними до моделювання будуть: координати послідовності n точок P_i та кути нахилу дотичних до кривої в точках P_1 і P_n.

Підставивши до параметричних рівнянь криволінійного обводу, отриманого із застосуванням лінійного елемента кривини [2], координати точок P_i, отримаємо $2(n-1)$ вирази

$$x_{P_{i+1}} = x_{P_i} + \int_0^{S_i} \cos\left(\varphi_{P_i} + \frac{a_i s^2}{2} + b_i s \right) ds;$$
$$y_{P_{i+1}} = y_{P_i} + \int_0^{S_i} \sin\left(\varphi_{P_i} + \frac{a_i s^2}{2} + b_i s \right) ds, \tag{4}$$

де i змінюється від 1 до $n-1$. При цьому в отриманих рівняннях такі невідомі: a_i, b_i — коефіцієнти лінійних елементів кривини для задання ділянок; S_i — довжина i-ої ділянки; φ_{P_i} — кут нахилу дотичної в точці P_i (i змінюється від 2 до $n-1$).

Загальна кількість невідомих у системі параметричних рівнянь (4) дорівнює $4(n-1)-2$. Запишемо вирази для знаходження кутів нахилу дотичних до кривої в останніх точках ділянок (i змінюється від 1 до $n-2$):

$$\varphi_{P_{i+1}} = \varphi_{P_i} + \frac{a_i S_i^2}{2} + b_i S_i. \qquad (5)$$

Кут нахилу дотичної в заданій (інтерполяційній) точці можна виразити через кут нахилу дотичної в точці P_1:

$$\varphi_{P_{i+1}} = \varphi_{P_1} + \sum_{j=1}^{i} S_j \left(\frac{a_j S_j}{2} + b_j \right).$$

У точках стику, крім рівності кутів нахилу дотичної до кривих, потрібно забезпечити рівність кривини (i змінюється від 1 до $n-1$):

$$b_{i+1} = a_i S_i + b_i.$$

Виразимо b_{i+1} через b_1 та отримаємо

$$b_{i+1} = b_1 + \sum_{j=1}^{i} a_j S_j. \qquad (6)$$

Підставимо вираз (6) до (5) та при $i = n-1$ отримаємо такий вираз для знаходження b_1:

$$b_1 = \frac{\varphi_{P_n} - \varphi_{P_1}}{\sum_{i=1}^{n-1} S_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i S_i^2}{2\sum_{i=1}^{n-1} S_i} - \frac{\sum_{i=2}^{n-1} S_i \sum_{j=1}^{i-1} a_j S_j}{\sum_{i=1}^{n-1} S_i}.$$

Отже, отримано вирази для $2(n-1)-2$ невідомих:

$$b_1 = \frac{\varphi_{P_n} - \varphi_{P_1}}{\sum_{i=1}^{n-1} S_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i S_i^2}{2\sum_{i=1}^{n-1} S_i} - \frac{\sum_{i=2}^{n-1} S_i \sum_{j=1}^{i-1} a_j S_j}{\sum_{i=1}^{n-1} S_i};$$

$$b_i = b_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j S_j;$$

$$\varphi_{P_i} = \varphi_{P_1} + \sum_{j=1}^{i-1} S_j \left(\frac{a_j S_j}{2} + b_j \right).$$

Таким чином, у системі параметричних рівнянь (4) залишається рівно $2(n-1)$ невідома. Запишемо цю систему після перетворень, враховуючи наведені вище вирази:

$$x_{P_{i+1}} = x_{P_i} + \int_0^{S_i} \cos \Phi_i(s)\, ds;$$

$$y_{P_{i+1}} = y_{P_i} + \int_0^{S_i} \sin \Phi_i(s)\, ds,$$

де

$$\Phi_i(s) = \varphi_{P_1} + \frac{a_i s^2}{2} + b_1 \left(s + \sum_{j=1}^{i-1} S_j \right) + \sum_{j=1}^{i-1} S_j \left[a_j \left(s + \frac{S_j}{2} \right) + \sum_{k=1}^{j-1} a_k S_k \right].$$

Отриману систему інтегральних рівнянь розв'яжемо за допомогою числового методу Ньютона.

Знайдемо частинні похідні рівнянь системи за невідомими a_i (i та j змінюються від 1 до $n-1$):

$$\frac{\partial f_{2j-1}}{\partial a_i} = -\int_0^{S_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial a_i} \sin \Phi_j(s)\, ds; \quad \frac{\partial f_{2j}}{\partial a_i} = \int_0^{S_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial a_i} \cos \Phi_j(s)\, ds,$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial a_i} = \frac{\partial b_1}{\partial a_i} \left(s + \sum_{k=1}^{j-1} S_k \right) + \begin{cases} a_i S_i \sum_{k=1}^{j-1} S_k, & i < j-1; \\ S_{j-1} \left(s + \frac{S_{j-1}}{2} \right), & i = j-1; \\ \frac{s^2}{2}, & i = j; \\ 0, & i > j; \end{cases}$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial a_i} = -\frac{S_i}{\sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j}\left(\frac{S_i}{2} + \sum_{j=i+1}^{n-1} S_j\right).$$

Запишемо також частинні похідні рівнянь системи за невідомими S_i, які залежать від значень i та j, що змінюються від 1 до $n-1$.

При $i = j$

$$\frac{\partial f_{2j-1}}{\partial S_i} = \frac{1}{S_j}\int_0^{S_j}\left[\cos\Phi_j(s) - \left(S_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial S_i} + s\frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\right)\sin\Phi_j(s)\right]ds;$$

$$\frac{\partial f_{2j}}{\partial S_i} = \frac{1}{S_j}\int_0^{S_j}\left[\sin\Phi_j(s) + \left(S_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial S_i} + s\frac{\partial \Phi_j}{\partial s}\right)\cos\Phi_j(s)\right]ds,$$

інакше ($i \neq j$)

$$\frac{\partial f_{2j-1}}{\partial S_i} = -\int_0^{S_j}\frac{\partial \Phi_j}{\partial S_i}\sin\Phi_j(s)ds; \quad \frac{\partial f_{2j}}{\partial S_i} = \int_0^{S_j}\frac{\partial \Phi_j}{\partial S_i}\cos\Phi_j(s)ds,$$

де

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial S_i} = \frac{\partial b_1}{\partial S_i}\left(s + \sum_{k=1}^{j-1} S_k\right) + \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{i-1} a_k S_k + a_i\left(s + \sum\limits_{k=i}^{j-1} S_k\right) + b_1, & i < j; \\ 0, & i \geq j; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial s} = a_j s + \sum_{k=1}^{j-1} a_k S_k + b_1;$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial S_i} = \frac{\varphi_{P_1} - \varphi_{P_n}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j\right)^2} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_j S_j + a_i \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} S_j}{\sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j} - \frac{2a_i S_i \sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_j S_j^2}{2\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j\right)^2} + \frac{\sum\limits_{j=2}^{n-1} S_j \sum\limits_{k=1}^{j-1} a_k S_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} S_j\right)^2}.$$

Отже, отримано метод побудови інтерполяційних елементів кривини для заданих точок, який дозволяє з'єднувати їх попарно кривими лініями, заданими лінійними елементами кривини із забезпеченням однакових кутів нахилу дотичних у точках стику.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

Розроблена методика побудови інтерполяційних елементів кривини, для чого сусідні точки сукупності з'єднуються кривими, які побудовані із застосуванням лінійних елементів кривини, але при умові, що в точках їх стику буде однаковий кут нахилу дотичної до отриманих кривих. Ця методика може бути застосована в багатьох задачах геометричного моделювання елементів проточних частин турбомашин, наприклад для подання профілів пера лопатки робочого колеса осьового компресора, оскільки вони базуються на вигині симетричного аеродинамічного профілю вздовж вигнутої середньої лінії. У подальшому планується застосувати інтерполяційні елементи кривини для геометричного моделювання поверхонь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] *Борисенко В.Д., Устенко С.А., Комар В.С.* Геометричне моделювання плоских криволінійних обводів за заданим параболічним законом розподілу їх кривини // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці Таврійської держ. агротехн. акад. — Мелітополь: ТДАТА, 2007. — Вип. 4, т. 35. — С. 26–31.

[2] *Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є.* Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини // Міжвідомчий наук.-техн. зб. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». — К.: КНУБА, 2006. — Вип. 76. — С. 43–49.

[3] *Михайленко В.Є., Лі В.Г.* Дискретне моделювання на базі інтегральної моделі кривої // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 1999. — Вип. 66. — С. 3–8.

[4] *Устенко С.А.* Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням елементів кривини // Геометричне та комп'ютерне моделювання. — Х.: Харк. держ. ун-т харчування та торгівлі, 2009. — Вип. 22. — С. 82–87.

[5] *Устенко С.А.* Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини // Вестник Херсон. нац. техн. ун-та. — Херсон: ХНТУ, 2008. — Вып. 2(31). — С. 480–484.

[6] *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. — М.: Мир, 1982. — 304 с.