

УДК 532.5.013.2
К 68

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Ю. М. Король, канд. техн. наук, профессор

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. В соответствии с законами теоретической механики получена в общем виде система уравнений движения твердого тела и окружающей его жидкости. Предложена схема совместного решения уравнений кинематики и гидродинамики, которая позволила существенно повысить точность моделирования. В качестве примера приведено решение нестационарной задачи о выходе судна на режим глисирования с использованием CFD комплекса FlowVision.

Ключевые слова: уравнения движения, тело, жидкость, схема решения.

Анотація. Відповідно до законів теоретичної механіки отримано в загальному вигляді систему рівнянь руху твердого тіла й рідини, що його оточує. Запропоновано схему спільного розв'язування рівнянь кінематики та гідродинаміки, яка дозволила істотно підвищити точність моделювання. Як приклад наведено розв'язування нестационарної задачі про вихід судна на режим глісування з використанням CFD комплексу FlowVision.

Ключові слова: рівняння руху, тіло, рідина, схема розв'язування.

Abstract. According to the laws of theoretical mechanics a general equations system of rigid body and surrounding fluid is obtained. The scheme of the joint decision of the kinematics and hydrodynamics equations is offered which allowed raising accuracy of modeling. As an example the decision of a non-stationary problem on changing vessel's mode into the one of gliding with use of CFD of the FlowVision complex is shown.

Keywords: motion equations, body, fluid, decision scheme.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

При движении твердых тел в жидкости под действием заданной системы внешних сил существует трудно разрешимая проблема определения закона этого движения. Строго говоря, этот закон должен определяться путем **совместного** решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения тела и краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих гидродинамическое взаимо-

действие тела и жидкости. Если раньше эти задачи длительное время решались отдельно, то благодаря совершенствованию компьютерной техники, успехам в развитии методов вычислительной гидродинамики (CFD) и разработке специализированных пакетов программ появилась возможность их совместного решения.

В настоящее время большинство компьютерных CFD симуляторов позволяют имитировать движение тел в жидкости. Однако во многих таких симуляторах сохранился упрощенный

подход к описанию движения тел, который в некоторых случаях приводит к нефизичным результатам, и поэтому возникла необходимость вывода строгих уравнений движения без каких-либо упрощающих допущений.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ И ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

В современных CFD комплексах, таких как STAR CD (www.cd-adapco.com), SHIPFLOW (www.flowtech.se), NUMECA FINE MARINE (www.numeca.com), FLOW3D (www.flow3d.com), FLOWVISION (www.flowvision.ru), дифференциальные уравнения движения тел записаны в двух системах координат. Уравнения, описывающие переносное движение полкуса, приведены в абсолютной, а вращательное — в подвижной системах координат. На неточность такого подхода обратил внимание еще Кирхгоф [1] и предложил оригинальный метод получения уравнений движения. Уравнения были нелинейными и довольно громоздкими, поэтому на практике в полном виде практически не использовались. По-видимому, именно этим объясняется тот факт, что их незаслуженно «забыли» разработчики указанных CFD пакетов. И в связи с этим создалась парадоксальная ситуация: затрачивается огромное количество усилий и ресурсов вычислительной техники для решения краевой задачи гидродинамики, с большой точностью определяются гидродинамические силы, а уравнения движения тела берутся в упрощенном виде, без учета взаимодействия отдельных видов движения!

ЦЕЛЬЮ СТАТЬИ является приведение в соответствие точности математического описания движения недеформируемого тела и окружающей его жидкости для возможности расширения класса задач корабельной гидродинамики, решаемых в CFD пакетах.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Пусть твердое тело, имеющее шесть степеней свободы, движется в жидкости под действием заданных сил и моментов. Положение тела в пространстве определяется координатами ξ_0, η_0, ζ_0 начала связанной с ним системы координат $Ox_0y_0z_0$ относительно неподвижной системы $O^*\xi\eta\zeta$ и эйлеровыми углами θ, ψ, χ , отсчет которых производится относительно подвижной, но не имеющей угловых перемещений системы $Ox_1y_1z_1$. Взаимное расположение систем показано на рис. 1.

Общие уравнения движения этого тела имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i; \\ \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{L} + \vec{u} \times \vec{K} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i \end{cases} \quad (1)$$

где \vec{K} — главный вектор количества движения; \vec{L} — главный вектор момента количества движения; $\vec{\omega}$ — вектор угловой, а \vec{u} — вектор линейной скорости тела; $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ и $\sum_{i=1}^N \vec{M}_i$ — суммы внешних сил и моментов.

Проекции \vec{K} и \vec{L} , входящих в (1), на оси координатной системы $Ox_0y_0z_0$ можно записать в виде производных от кинетической энергии T :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\partial T}{\partial u_1}; & K_2 &= \frac{\partial T}{\partial u_2}; & K_3 &= \frac{\partial T}{\partial u_3}; \\ L_1 &= \frac{\partial T}{\partial \omega_1}; & L_2 &= \frac{\partial T}{\partial \omega_2}; & L_3 &= \frac{\partial T}{\partial \omega_3}, \end{aligned}$$

причем индексы 1, 2, 3 здесь и в дальнейшем будут обозначать соответственную проекции на оси x, y, z . Кинетическая энергия движущегося тела вычисляется по формуле

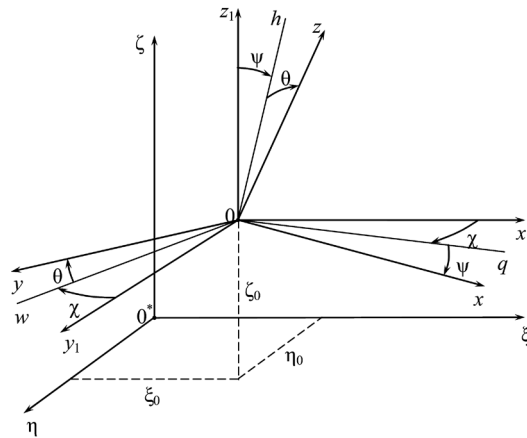


Рис. 1. Системы координат

$$T = \frac{1}{2} [\nabla_m (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + 2M_{s1}(u_2\omega_3 - u_3\omega_2) + 2M_{s2}(u_3\omega_1 - u_1\omega_3) + 2M_{s3}(u_1\omega_2 - u_2\omega_1) + J_{11}\omega_1^2 + J_{22}\omega_2^2 + J_{33}\omega_3^2 + 2J_{12}\omega_1\omega_2 + 2J_{23}\omega_2\omega_3 + 2J_{31}\omega_3\omega_1],$$

где ∇_m — масса тела; $M_{s1} = \nabla_m x_g$; $M_{s2} = \nabla_m y_g$; $M_{s3} = \nabla_m z_g$ — статические моменты массы; x_g, y_g, z_g — координаты центра тяжести; J_{11}, J_{22}, J_{33} — моменты инерции, а J_{12}, J_{23}, J_{31} — центробежные моменты инерции массы тела.

В проекциях на оси связанной с телом системы координат общие уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} \dot{K}_1 + \omega_2 K_3 - \omega_3 K_2 = \sum_{i=1}^N F_{1i}; \\ \dot{K}_2 + \omega_3 K_1 - \omega_1 K_3 = \sum_{i=1}^N F_{2i}; \\ \dot{K}_3 + \omega_1 K_2 - \omega_2 K_1 = \sum_{i=1}^N F_{3i}; \\ \dot{L}_1 + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 + u_2 K_3 - u_3 K_2 = \sum_{i=1}^N M_{1i}; \\ \dot{L}_2 + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 + u_3 K_1 - u_1 K_3 = \sum_{i=1}^N M_{2i}; \\ \dot{L}_3 + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 + u_1 K_2 - u_2 K_1 = \sum_{i=1}^N M_{3i}, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$K_1 = \nabla_m (u_1 + \omega_2 z_g - \omega_3 y_g);$$

$$K_2 = \nabla_m (u_2 + \omega_3 x_g - \omega_1 z_g);$$

$$K_3 = \nabla_m (u_3 + \omega_1 y_g - \omega_2 x_g);$$

$$L_1 = \nabla_m (y_g u_3 - z_g u_2) + J_{11}\omega_1 - J_{12}\omega_2 - J_{31}\omega_3;$$

$$L_2 = \nabla_m (z_g u_1 - x_g u_3) + J_{22}\omega_2 - J_{12}\omega_1 - J_{23}\omega_3;$$

$$L_3 = \nabla_m (x_g u_2 - y_g u_1) + J_{33}\omega_3 - J_{23}\omega_2 - J_{31}\omega_1;$$

Рассмотрим простейший случай, когда центр тяжести совпадает с началом системы координат: $x_g = y_g = z_g = 0$ и $J_{12} = J_{23} = J_{31} = 0$.

Тогда система (2) легко преобразуется к каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2\omega_3 - u_3\omega_2 + \frac{1}{\nabla_m} \sum_{i=1}^N F_{1i}; \\ \dot{u}_2 = u_3\omega_1 - u_1\omega_3 + \frac{1}{\nabla_m} \sum_{i=1}^N F_{2i}; \\ \dot{u}_3 = u_1\omega_2 - u_2\omega_1 + \frac{1}{\nabla_m} \sum_{i=1}^N F_{3i}; \\ \dot{\omega}_1 = \frac{J_{22} - J_{33}}{J_{11}} \omega_2 \omega_3 + \frac{1}{J_{11}} \sum_{i=1}^N M_{1i}; \\ \dot{\omega}_2 = \frac{J_{33} - J_{11}}{J_{22}} \omega_1 \omega_3 + \frac{1}{J_{22}} \sum_{i=1}^N M_{2i}; \\ \dot{\omega}_3 = \frac{J_{11} - J_{22}}{J_{33}} \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{J_{33}} \sum_{i=1}^N M_{3i}, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}\dot{\xi}_0 + a_{12}\dot{\eta}_0 + a_{13}\dot{\zeta}_0; \\ u_2 &= a_{21}\dot{\xi}_0 + a_{22}\dot{\eta}_0 + a_{23}\dot{\zeta}_0; \\ u_3 &= a_{31}\dot{\xi}_0 + a_{32}\dot{\eta}_0 + a_{33}\dot{\zeta}_0; \\ \omega_1 &= b_{11}\dot{\theta} + b_{12}\dot{\psi} + b_{13}\dot{\chi}; \\ \omega_2 &= b_{21}\dot{\theta} + b_{22}\dot{\psi} + b_{23}\dot{\chi}; \\ \omega_3 &= b_{31}\dot{\theta} + b_{32}\dot{\psi} + b_{33}\dot{\chi}, \end{aligned} \quad (4)$$

а направляющие косинусы a_{ij} и b_{ij} определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos\chi \cdot \cos\psi; \quad a_{12} = \sin\chi \cdot \cos\psi; \quad a_{13} = -\sin\psi; \\ a_{21} &= -\cos\theta \cdot \sin\chi + \sin\theta \cdot \cos\chi \cdot \sin\psi; \\ a_{22} &= \cos\theta \cdot \cos\chi + \sin\theta \cdot \sin\chi \cdot \sin\psi; \\ a_{23} &= \sin\theta \cdot \cos\psi; \\ a_{31} &= \sin\theta \cdot \sin\chi + \cos\theta \cdot \cos\chi \cdot \sin\psi; \\ a_{32} &= -\sin\theta \cdot \cos\chi + \cos\theta \cdot \sin\chi \cdot \sin\psi; \\ a_{33} &= \cos\theta \cdot \cos\psi; \\ b_{11} &= 1; \quad b_{12} = 0; \quad b_{13} = -\sin\psi; \\ b_{21} &= 0; \quad b_{22} = \cos\theta; \quad b_{23} = \sin\theta \cdot \cos\psi; \\ b_{31} &= 0; \quad b_{32} = -\sin\theta; \quad b_{33} = \cos\theta \cdot \cos\psi; \end{aligned}$$

Закон движения определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3; \\ \dot{\eta}_0 &= \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3; \\ \dot{\zeta}_0 &= \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3; \\ \dot{\theta} &= \beta_{11}\omega_1 + \beta_{12}\omega_2 + \beta_{13}\omega_3; \\ \dot{\psi} &= \beta_{21}\omega_1 + \beta_{22}\omega_2 + \beta_{23}\omega_3; \\ \dot{\chi} &= \beta_{31}\omega_1 + \beta_{32}\omega_2 + \beta_{33}\omega_3, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых обозначено:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\Delta_{aij}}{\Delta_a}; \quad \beta_{ij} = \frac{\Delta_{bij}}{\Delta_b}; \quad I, j = 1, 2, 3; \\ \Delta_{a11} &= a_{33}a_{22} - a_{23}a_{32}; \quad \Delta_{a12} = a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12}; \\ \Delta_{a13} &= a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}; \quad \Delta_{a21} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{15} &= z_g; \quad e_{16} = -y_g; \quad e_{24} = -z_g; \quad e_{26} = x_g; \quad e_{34} = y_g; \quad e_{35} = -x_g; \\ e_{42} &= -\frac{\nabla_m z_g}{J_{11}}; \quad e_{43} = \frac{\nabla_m y_g}{J_{11}}; \quad e_{45} = -\frac{J_{12}}{J_1}; \quad e_{46} = -\frac{J_{31}}{J_{11}}; \quad e_{51} = \frac{\nabla_m z_g}{J_{22}}; \quad e_{53} = -\frac{\nabla_m x_g}{J_{22}}; \quad e_{54} = -\frac{J_{12}}{J_{22}}; \\ e_{56} &= -\frac{J_{23}}{J_{22}}; \quad e_{61} = -\frac{\nabla_m y_g}{J_{33}}; \quad e_{62} = \frac{\nabla_m x_g}{J_{33}}; \quad e_{64} = -\frac{J_{23}}{J_{33}}; \quad e_{65} = -\frac{J_{31}}{J_{33}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{a22} &= a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13}; \quad \Delta_{a23} = a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}; \\ \Delta_{a31} &= a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}; \quad \Delta_{a32} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}; \\ \Delta_{a33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \\ \Delta_{b11} &= b_{33}b_{22} - b_{23}b_{32}; \quad \Delta_{b12} = b_{13}b_{32} - b_{33}b_{12}; \\ \Delta_{b13} &= b_{12}b_{21} - b_{13}b_{22}; \quad \Delta_{b21} = b_{31}b_{23} - b_{21}b_{33}; \\ \Delta_{b22} &= b_{33}b_{11} - b_{31}b_{13}; \quad \Delta_{b23} = b_{21}b_{13} - b_{11}b_{23}; \\ \Delta_{b31} &= b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}; \quad \Delta_{b32} = b_{31}b_{12} - b_{11}b_{32}; \\ \Delta_{b33} &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_a &= -a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + \\ &+ a_{11}a_{33}a_{22} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}; \\ \Delta_b &= -b_{11}b_{32}b_{23} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{31}b_{12}b_{23} + \\ &+ b_{11}b_{33}b_{22} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{31}b_{22} \end{aligned}$$

Таким образом, при заданных внешних силах и моментах, а также указанных выше ограничениях задача определения характеристик движения сводится к совместному решению обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (3) и (5), приведенных к удобному для интегрирования каноническому виду.

В общем случае, когда центр тяжести не совпадает с началом координат и, более того, в процессе движения тела сам перемещается и, к тому же, центробежные моменты инерции отличны от нуля, уравнения движения приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 + e_{15}\dot{\omega}_2 + e_{16}\dot{\omega}_3 = f_1; \\ \dot{u}_2 + e_{24}\dot{\omega}_1 + e_{26}\dot{\omega}_3 = f_2; \\ \dot{u}_3 + e_{34}\dot{\omega}_1 + e_{35}\dot{\omega}_2 = f_3; \\ e_{42}\dot{u}_2 + e_{43}\dot{u}_3 + \dot{\omega}_1 + e_{45}\dot{\omega}_2 + e_{46}\dot{\omega}_3 = f_4; \\ e_{51}\dot{u}_1 + e_{53}\dot{u}_3 + e_{54}\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + e_{56}\dot{\omega}_3 = f_5; \\ e_{61}\dot{u}_1 + e_{62}\dot{u}_2 + e_{64}\dot{\omega}_1 + e_{65}\dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 = f_6, \end{cases} \quad (6)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -\omega_2(\dot{z}_g + u_3 + \omega_1 y_g - \omega_2 x_g) + \omega_3(\dot{y}_g + u_2 + \omega_3 x_g - \omega_1 z_g) + \frac{1}{\nabla} \sum_{i=1}^N F_{1i}; \\
 f_2 &= -\omega_3(\dot{x}_g + u_1 + \omega_2 z_g - \omega_3 y_g) + \omega_1(\dot{z}_g + u_3 + \omega_1 y_g - \omega_2 x_g) + \frac{1}{\nabla} \sum_{i=1}^N F_{2i}; \\
 f_3 &= -\omega_1(\dot{y}_g + u_2 + \omega_3 x_g - \omega_1 z_g) + \omega_2(\dot{x}_g + u_1 + \omega_2 z_g - \omega_3 y_g) + \frac{1}{\nabla} \sum_{i=1}^N F_{3i}; \\
 f_4 &= -\frac{\nabla_m}{J_{11}}(\dot{y}_g u_3 - \dot{z}_g u_2) - \frac{\omega_2}{J_{11}}[\nabla_m(x_g u_2 - y_g u_1) + J_{33}\omega_3 - J_{23}\omega_2 - J_{31}\omega_1] + \\
 &+ \frac{\omega_3}{J_{11}}[\nabla_m(z_g u_1 - x_g u_3) + J_{22}\omega_2 - J_{12}\omega_1 - J_{23}\omega_3] - \frac{\nabla_m}{J_{11}}[u_2(u_3 + \omega_1 y_g - \omega_2 x_g) + \\
 &+ u_3(u_2 + \omega_3 x_g - \omega_1 z_g)] + \frac{1}{J_{11}} \sum_{i=1}^N M_{1i}; \\
 f_5 &= -\frac{\nabla_m}{J_{22}}(\dot{z}_g u_1 - \dot{x}_g u_3) - \frac{\omega_3}{J_{22}}[\nabla_m(y_g u_3 - z_g u_2) + J_{11}\omega_1 - J_{12}\omega_2 - J_{31}\omega_1] + \\
 &+ \frac{\omega_1}{J_{22}}[\nabla_m(x_g u_2 - y_g u_1) + J_{33}\omega_3 - J_{23}\omega_2 - J_{31}\omega_1] - \frac{\nabla_m}{J_{22}}[u_3(u_1 + \omega_2 z_g - \omega_3 y_g) + \\
 &+ u_1(u_3 + \omega_1 y_g - \omega_2 x_g)] + \frac{1}{J_{22}} \sum_{i=1}^N M_{2i}; \\
 f_6 &= -\frac{\nabla_m}{J_{33}}(\dot{x}_g u_2 - \dot{y}_g u_1) - \frac{\omega_1}{J_{33}}[\nabla_m(z_g u_1 - x_g u_3) + J_{22}\omega_2 - J_{12}\omega_1 - J_{23}\omega_3] + \\
 &+ \frac{\omega_2}{J_{33}}[\nabla_m(y_g u_3 - z_g u_2) + J_{11}\omega_1 - J_{12}\omega_2 - J_{31}\omega_3] - \frac{\nabla_m}{J_{33}}[u_1(u_2 + \omega_3 x_g - \omega_1 z_g) + \\
 &+ u_2(u_1 + \omega_2 z_g - \omega_3 y_g)] + \frac{1}{J_{33}} \sum_{i=1}^N M_{3i}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что и систему (6) также можно привести к каноническому виду

$$\begin{cases}
 \dot{u}_1 = \gamma_{11}f_1 + \gamma_{12}f_2 + \gamma_{13}f_3 + \epsilon_{14}f_4 + \gamma_{15}f_5 + \gamma_{16}f_6; \\
 \dot{u}_2 = \gamma_{21}f_1 + \gamma_{22}f_2 + \gamma_{23}f_3 + \gamma_{24}f_4 + \gamma_{25}f_5 + \gamma_{26}f_6; \\
 \dot{u}_3 = \gamma_{31}f_1 + \gamma_{32}f_2 + \gamma_{33}f_3 + \gamma_{34}f_4 + \gamma_{35}f_5 + \gamma_{36}f_6; \\
 \dot{\omega}_1 = \gamma_{41}f_1 + \gamma_{42}f_2 + \gamma_{43}f_3 + \gamma_{44}f_4 + \gamma_{45}f_5 + \gamma_{46}f_6; \\
 \dot{\omega}_2 = \gamma_{51}f_1 + \gamma_{52}f_2 + \gamma_{53}f_3 + \gamma_{54}f_4 + \gamma_{55}f_5 + \gamma_{56}f_6; \\
 \dot{\omega}_3 = \gamma_{61}f_1 + \gamma_{62}f_2 + \gamma_{63}f_3 + \gamma_{64}f_4 + \gamma_{65}f_5 + \gamma_{66}f_6,
 \end{cases} \tag{7}$$

где $\gamma_{ij} = \Delta_{eij}/\Delta_e$; $i, j = 1, 2, \dots, 6$, а выражения для определителя коэффициентов системы (6) Δ_e и алгебраических дополнений Δ_{eij} легко могут быть получены, но в силу громоздкости в настоящей статье не приводятся.

Особенностью общих уравнений движения (5) и (7) является тесная взаи-

мосвязь между линейными u_i и угловыми ω_i скоростями, поэтому физическая возможность существования отдельных видов движения зависит не только от симметрии внешних сил, но и от симметрии масс. Как правило, перемещение или вращение тела относительно какой-либо оси сопровождается перемещени-

ем и вращением относительно других осей. Поэтому эта система уравнений служит не только для определения кинематических характеристик движения, но и для исследования устойчивости, а также для проектирования систем и устройств, обеспечивающих управляемость движущихся объектов.

Перейдем теперь к определению внешних гидродинамических сил, действующих на смоченную поверхность тела. Общие формулы для определения этих сил и моментов имеют вид

$$\vec{F}_1 = \iint_S \vec{p}_n dS; \quad \vec{M}_1 = \iint_S (\vec{p}_n \times \vec{r}) dS, \quad (8)$$

где $\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(n, x) + \vec{p}_y \cos(n, y) + \vec{p}_z \cos(n, z)$ — вектор напряженности поверхностных сил; \vec{r} — радиус-вектор точки смоченной поверхности тела; S — площадь этой поверхности.

В принципе, для несжимаемой жидкости составляющие вектора \vec{p}_n должны определяться из общих уравнений движения жидкости в напряжениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} v_z = \\ = \bar{\Phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla \bar{v} = 0,$$

в которых обозначено: \bar{v} — вектор скорости движения жидкости; $\bar{\Phi}$ — вектор напряженности массовых сил; ρ — плотность жидкости; $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона.

В силу симметрии тензора поверхностных напряжений

$$\begin{vmatrix} p_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & p_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix}; \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}; \tau_{zx} = \tau_{xz}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

уравнения (9) содержат девять неизвестных функций:

$$v_x(x, y, z, t); v_y(x, y, z, t); v_z(x, y, z, t);$$

$$p_{xx}(x, y, z, t); p_{yy}(x, y, z, t); p_{zz}(x, y, z, t);$$

$\tau_{xy}(x, y, z, t); \tau_{xz}(x, y, z, t); \tau_{zy}(x, y, z, t)$ и образуют, с математической точки зрения, так называемую незамкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных. К настоящему времени наиболее результативным оказался следующий метод их замыкания. Вектор скорости представляется в виде суммы $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}''$, где \bar{v}' — медленная функция времени, характеризующая макродвижение жидкости, а \bar{v}'' — быстрая функция времени, характеризующая турбулентные пульсации. Аналогично можно представить и тензор $\bar{p}_n = \bar{p}'_n + \bar{p}''_n$.

Далее применим к уравнениям (9) операцию осреднения по периоду пульсационного движения, после чего получим уравнения Рейнольдса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} v'_x + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} v'_y + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial z} v'_z = \\ = \bar{\Phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\bar{p}'_x + \bar{p}''_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{p}'_y + \bar{p}''_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{p}'_z + \bar{p}''_z)}{\partial z} \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$p'_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v'_x}{\partial x}; \quad p'_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v'_y}{\partial y};$$

$$p'_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v'_z}{\partial z};$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right);$$

$$\tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v'_z}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial z} \right); \quad (11)$$

$$\tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v'_z}{\partial y} + \frac{\partial v'_y}{\partial z} \right) —$$

так называемые обобщенные формулы Ньютона для вязкостных напряжений, а

$$p''_{xx} = -\rho \overline{v''_x v''_x}; \quad p''_{yy} = -\rho \overline{v''_y v''_y}; \quad p''_{zz} = -\rho \overline{v''_z v''_z};$$

$$\tau''_{xy} = \tau''_{yx} = -\rho \overline{v''_x v''_y}; \quad \tau''_{xz} = \tau''_{zx} = -\rho \overline{v''_x v''_z};$$

$$\tau''_{yz} = \tau''_{zy} = -\rho \overline{v''_y v''_z} — \quad (12)$$

выражения для турбулентных напряжений, в которых черта над произведения-

ми пульсационных скоростей — знак осреднения.

Затем в соответствии с гипотезой Буссинеска турбулентные напряжения связываются с тензором осредненных деформаций формулами

$$\begin{aligned}
 p''_{xx} &= -\frac{2}{3}\rho k + 2\mu_T \frac{\partial v'_x}{\partial x}; \\
 p''_{yy} &= -\frac{2}{3}\rho k + 2\mu_T \frac{\partial v'_y}{\partial y}; \\
 p''_{zz} &= -\frac{2}{3}\rho k + 2\mu_T \frac{\partial v'_z}{\partial z}; \\
 \tau''_{xy} &= \tau''_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right); \\
 \tau''_{xy} &= \tau''_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right); \\
 \tau''_{xy} &= \tau''_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial v'_y}{\partial x} + \frac{\partial v'_x}{\partial y} \right),
 \end{aligned} \tag{13}$$

в которых $k(x, y, z, t)$ — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, а $\mu_T(x, y, z, t)$ — турбулентная вязкость.

Существует большое число моделей турбулентности [3, 4], в которых приведены формулы или уравнения для определения k и μ_T , необходимых для замыкания уравнений (10)–(13). Каждая из моделей содержит некоторое количество эмпирических коэффициентов и функций, которые соответствуют определенному типу течения, поэтому выбор подходящей модели является одной из задач численного моделирования. Кроме того, следует иметь в виду, что при приближении к непроницаемой стенке $k \rightarrow 0$ и $\mu_T \rightarrow 0$, следовательно, для определения гидродинамических сил и моментов по формулам (8) составляющие тензора напряжений следует вычислять по формулам (11).

Теперь, если систему (10)–(13) дополнить начальными

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z, t = t_0) &= p_{in}(x, y, z); \\
 \bar{v}(x, y, z, t = t_0) &= \bar{v}_{in}(x, y, z)
 \end{aligned} \tag{14}$$

и граничными условиями:

1) на смоченной поверхности тела S

$$\bar{v} \cdot \bar{n}|_S = \bar{u} \cdot \bar{n} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \bar{n}; \tag{15}$$

2) на бесконечном удалении

$$\bar{v}|_{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \infty} = 0; \tag{16}$$

3) на свободной поверхности $z = \zeta_w(x, y, t)$

$$\begin{aligned}
 v_z|_{z=\zeta_w} &= \frac{\partial \zeta_w}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta_w}{\partial y} v_y + \frac{\partial \zeta_w}{\partial t}; \\
 p(x, y, z, t)|_{z=\zeta_w} &= p_0,
 \end{aligned} \tag{17}$$

то получим так называемую краевую задачу для определения поля скорости $\bar{v}(x, y, z, t)$ и давления $p(x, y, z, t)$. Следует заметить, что вид начальных и граничных условий зависит от выбранной системы координат, а приведенные выражения (9)–(17) соответствуют неподвижной системе координат $0^* \xi \eta \zeta$.

Строго говоря, краевая задача (10)–(17) должна решаться совместно с уравнениями движения (3), (5) или (5), (7), однако из-за невероятной сложности эти задачи, как правило, решались раздельно. Исключительно плодотворной в этом направлении оказалась гипотеза суперпозиции гидродинамических сил инерционной и вязкостной природы.

Инерционные гидродинамические силы традиционно полагались пропорциональными ускорениям тела. Так называемые присоединенные массы, являющиеся коэффициентами пропорциональности, определялись теоретически решением потенциальных задач динамики идеальной жидкости.

Силы вязкостной природы, в свою очередь, делились на позиционные, зависящие от положения тела по отношению к вектору скорости набегающего потока, и демпфирующие, зависящие от угловых скоростей. Наиболее надежным способом определения сил этих категорий традиционно считался систематический модельный эксперимент в сочетании с гипотезой квазистационарности.

Потребности судостроения инициируют постоянное появление большого количества достаточно сложных задач, в том числе и задач динамики многих гидродинамически взаимодействующих тел. Объем экспериментальных исследований непрерывно растет, и к настоящему времени его стоимость и сроки проведения настолько возросли, что стали недоступными и неприемлемыми для большинства проектных организаций. Создалась проблемная ситуация, выходом из которой может быть применение к решению таких задач интенсивно развивающихся методов вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics или сокращенно — CFD). Суть этих методов состоит в замене исходных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных системами алгебраических уравнений при помощи дискретизации времени и пространства, а их реализация — специализированными программными комплексами.

Как правило, современные CFD комплексы состоят из препроцессора, решателя и постпроцессора. В препроцессоре осуществляются следующие виды работ: формулировка задачи; импорт геометрии расчетной области из CAD

систем; ввод исходных данных и параметров моделирования; формирование и расстановка граничных условий; генерация или импорт расчетной сетки; выбор модели турбулентности; выбор степени адаптации сетки и др. Решатель осуществляет формирование и решение алгебраических уравнений с заданным или автоматически генерируемым шагом по времени и передает результаты в постпроцессор. Основное назначение постпроцессора — вывод и сохранение результатов расчета в удобном для использования и анализа виде.

Особенностью многих программных комплексов и, в частности, используемого автором комплекса FlowVision [3] является потенциальная возможность совместного решения сформулированных выше задач кинематики (5), (7) и гидродинамики (10)–(17) как для одного, так и для нескольких тел.

Рассмотрим в качестве примера задачу о глиссировании судна, особенностью которой является тесная взаимосвязь кинематической и гидродинамической задач.

Пусть в начальный момент времени судно плавает с начальным углом дифферента $\psi = \psi_0$ (рис. 2), $\xi_{zg} = 0$, $\zeta_{zg} = \zeta_{z0}$, упор гребного винта $\vec{T} = 0$, а центр

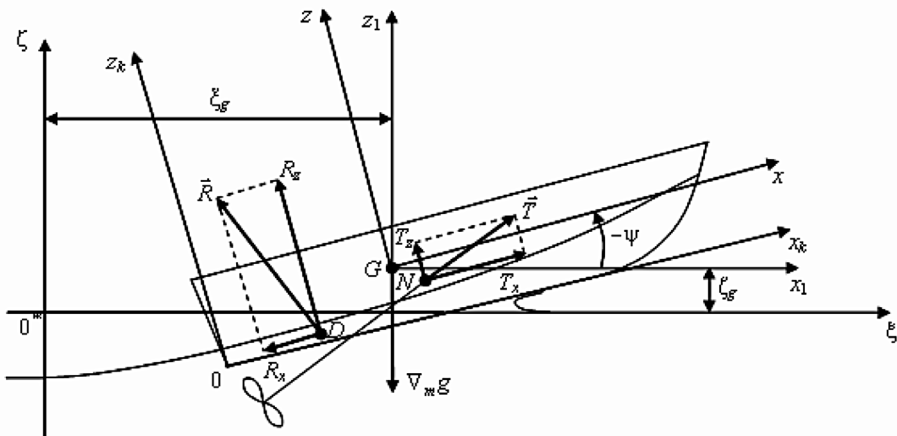


Рис. 2. Системы координат и силы, действующие на глиссирующее судно

давления D расположен в центре тяжести подводного объема. Гидродинамическая сила \vec{R} направлена вертикально вверх и равна архимедовой силе.

По мере возрастания упора изменяются величина и направление реакции \vec{R} , а также положение центра давления, что, в свою очередь, вызывает изменение параметров посадки судна.

Уравнения движения судна в плоскости $\xi O^* \zeta$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\omega_2 u_3 + \frac{1}{\nabla_m} (\nabla_m g \sin \psi + T_x - R_x); \\ \dot{u}_3 &= \omega_2 u_1 + \frac{1}{\nabla_m} (-\nabla_m g \cos \psi + T_z + R_z); \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_{22}} [\nabla_m g (x_g \cos \psi - z_g \sin \psi) + \\ &\quad + T_x z_n - T_z x_n - R_x z_d - R_z x_d]; \quad (18) \\ \dot{\xi}_g &= \alpha_{11} u_1 + \alpha_{13} u_3; \quad \dot{\zeta}_g = \alpha_{31} u_1 + \alpha_{33} u_3; \\ \dot{\psi} &= \omega_2. \end{aligned}$$

Решение сформулированной задачи осуществлялось в программном комплексе FlowVision [2]. В процессе моделиро-

вания были созданы твердотельные модели корпуса глиссирующего судна и бокса в CAD системе SolidWorks и экспортированы в формате .stl в CAE FlowVision. Далее в препроцессоре выбрана математическая модель «свободная поверхность», в которой уравнения Рейнольдса будут дополнены уравнениями k - ϵ модели турбулентности и уравнением для функции VOF, моделирующей свободную поверхность. Параметры фильтра подвижного тела установлены в соответствии с уравнениями (18). В процессе исследования выполнен поиск оптимальных параметров моделирования: шага сетки, степени адаптации сетки по поверхности глиссера и шага по времени (число CFL). Получены гидродинамические силы на корпусе судна, закон его движения и картина волнообразования. При помощи специального инструмента FlowVision был создан фильм, демонстрирующий процесс выхода судна на режим глиссирования. Фрагменты из этого фильма изображены на рис. 3.

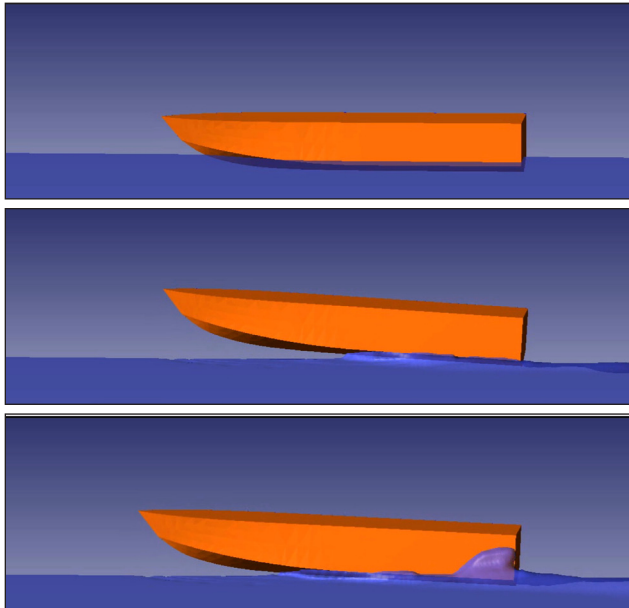


Рис. 3. Процесс выхода судна на режим глиссирования

ВЫВОДЫ

Получены полные уравнения движения твердого тела в подвижной системе координат, что дает возможность моделировать сложные нестационарные движения при условиях, максимально приближенных к реальным. Эти уравнения

позволили промоделировать процесс выхода судна на режим глиссирования, что имеет большое практическое значение для разработки имитационных моделей быстроходных судов и оценки их эксплуатационных характеристик без проведения модельных и натурных испытаний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Кирхгоф, Г.** Механика. Лекции по математической физике [Текст] / Г. Кирхгоф. — М. : ИАН СССР, 1962. — 404 с.
- [2] **Король, Ю.М.** Моделирование процесса глиссирования в программном комплексе FlowVision [Текст] / Ю.М. Король, Ле Куок Ван // Зб. наук. праць НУК. — Миколаїв : Издательство НУК, 2010. — № 5 (434). — С. 19–26.
- [3] Система моделирования движения жидкости и газа FlowVision [Текст]. — М. : ООО «ТЕСИС», 1999–2009. — 305 с.
- [4] **Wilcox, D.С.** Turbulence modeling for CFD [Text] / D. С. Wilcox. — La Cañada, California : DWC Industries Inc., 1994. — 477 p.