

УДК 681.51  
Т 41

## АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МОРСКИХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

В. Л. Тимченко, доц., канд. техн. наук;  
О. А. Ухин, асп.

*Национальный университет кораблестроения, г. Николаев*

**Аннотация.** Рассмотрены алгоритмические процедуры квазилинеаризации динамических моделей морских подвижных объектов. Проведен сравнительный анализ модифицированной процедуры линеаризации с методами разложения в ряд Тейлора и наименьших квадратов и приведены результаты моделирования, демонстрирующие более высокую точность полученных моделей.

**Ключевые слова:** модифицированная процедура квазилинеаризации, нелинейные модели, морской подвижный объект.

**Анотація.** Розглянуто алгоритмічні процедури квазілінеаризації динамічних моделей морських рухомих об'єктів. Проведено порівняльний аналіз модифікованої процедури лінеаризації з методами розкладання в ряд Тейлора та найменших квадратів і наведено результати моделювання, які демонструють більш високу точність отриманих моделей.

**Ключові слова:** модифікована процедура квазілінеаризації, нелінійні моделі, морський рухомий об'єкт.

**Abstract.** The article deals with algorithmic procedures of quasilinearization of the dynamic models of the marine motion objects. A comparative analysis of the modified procedure of linearization with methods of the Taylor series expansions and least-squares is conducted. Simulation results that show a higher accuracy of the obtained models are presented.

**Keywords:** modified procedure of linearization, non-linear models, marine motion object.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Проблема управления динамическими объектами — одна из классических задач теории управления. Особое место в классе управляемых систем занимают объекты, динамические процессы в которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Это объясняется широким спектром нели-

нейных функций, которые могут входить в математическую модель объекта управления, вследствие чего при проектировании системы управления каждый объект требует специального подхода. Для построения систем управления с помощью известных классических методов синтеза исходные нелинейные уравнения обычно необходимо преобразовать в линейные.

## АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Для систем со «слабой» нелинейностью используются метод наименьших квадратов и разложение в ряд Тейлора [8, 9]. Оба метода приводят к практически одинаковым результатам. Метод касательной аппроксимации (разложение в ряд Тейлора) более простой, а аппроксимация по методу наименьших квадратов более точная, если многочлен имеет порядок, равный трем или больше. Метод наименьших квадратов заключается в нахождении такой линейной функции, которая обеспечивает наименьшее значение суммарной квадратичной ошибки отклонения искомой функции для всех точек измерений. В некоторых случаях предлагается замена нелинейного элемента системы линейным [4]. Однако в этих статьях не уделяется должного внимания модифицированной процедуре линеаризации.

**ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ** является исследование модифицированной процедуры

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) &= \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{X}(0)) + \left. \frac{d\dot{\mathbf{X}}}{d\mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}(0)} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}(0)) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X}(0) + \left. \frac{d\mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}(0)} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}(0)) = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X}(0) + \mathbf{R}(\mathbf{X}(0)) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}(0)). \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X}(0) + \mathbf{R}(\mathbf{X}(0)) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}(0)) = \mathbf{R}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X} + [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}(\mathbf{X}(0))]. \quad (1)$$

В приведенной форме уравнение (1) примет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{A}^*, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{X}(0));$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}(\mathbf{X}(0)).$$

Решение дифференциального уравнения (2) находим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^*(t) &= e^{\mathbf{R}t} \mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)} \mathbf{A}^* d\tau = \\ &= e^{\mathbf{R}t} \mathbf{X}(0) + (e^{\mathbf{R}t} - \mathbf{E})\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}^*. \quad (3) \end{aligned}$$

Исходное нелинейное уравнение с учетом (3) примет вид

линеаризации и сравнение с другими известными методами линеаризации.

## ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Модифицированная процедура линеаризации используется для дифференциальных уравнений со «слабой» нелинейностью. Данная процедура состоит из следующих этапов:

- 1) линеаризация разложением в ряд Тейлора;
- 2) нахождение решения дифференциального уравнения;
- 3) подстановка решения в исходное дифференциальное уравнение.

Для нелинейной функции общего вида запишем векторно-матричное уравнение

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X},$$

где  $\mathbf{X}$  — вектор фазовых координат объекта управления;

$\mathbf{A}(\mathbf{X})$  — матрица нелинейных параметров.

При разложении в ряд Тейлора получим выражение

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{X}^*) \cdot \mathbf{X}.$$

Рассмотрим в качестве нелинейного объекта судно, управляемое пером руля в потоке жидкости, создаваемой винтом. При движении судна управление углом поворота руля  $\alpha$  может выполняться по различным управляемым координатам: продольной и поперечной скоростям (смещению), угловой скорости (углу курса) — рис. 1.

Уравнения динамики судна при слабом маневрировании (малых углах дрейфа) и допущениях, принятых в [6], имеет вид

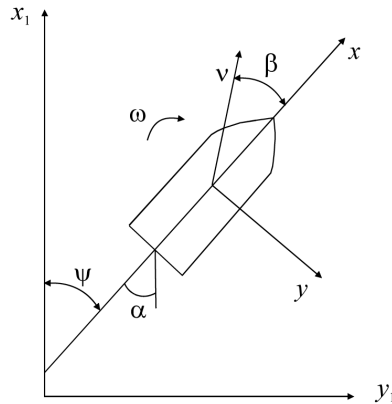


Рис. 1. Движение судна в неподвижной  $(x_1, y_1)$  и подвижной  $(x, y)$  системах координат

$$\frac{d\beta(t)}{dt} + q_{21}\beta(t) + r_{21}\bar{\omega} + s_{21}\alpha + h_1\beta(t)|\beta(t)| = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} + q_{31}\beta(t) + r_{31}\bar{\omega} + s_{31}\alpha = 0.$$

Для оценки эффективности линеаризации применим линейный закон управления

$$\alpha = -k_p\beta(t). \quad (5)$$

Используя формулы, приведенные в [5, 6], и подставив (5) в уравнение (4), получим

$$\frac{d\beta(t)}{dt} + \left[ \left( q_{21} + \frac{r_{21}q_{31}}{r_{31}} \right) - \left( s_{21} + \frac{r_{21}s_{31}}{r_{31}} \right) k_p \right] \beta(t) + h_1\beta(t)|\beta(t)| = 0.$$

Для угла дрейфа  $\beta > 0$  будем иметь

$$\frac{d\beta(t)}{dt} + h_2\beta(t) + h_1\beta^2(t) = 0. \quad (6)$$

Примем для модели судна численные значения:  $h_2 = 0,04$ ,  $h_1 = -0,015$  — и запишем уравнение (6) в виде

$$\dot{\beta}(t) = -0,04\beta(t) + 0,015\beta^2(t). \quad (7)$$

Так как максимальный порядок многочлена равен двум, для сравнения с модифицированной процедурой линеаризации целесообразно использовать разложение в ряд Тейлора [9]. Тогда

$$\dot{\beta}(t) = -0,04\beta(t) + 0,015(2\beta_0\beta(t) - \beta_0^2).$$

Приняв  $\beta_0 = 0,1$ , запишем уравнение в виде

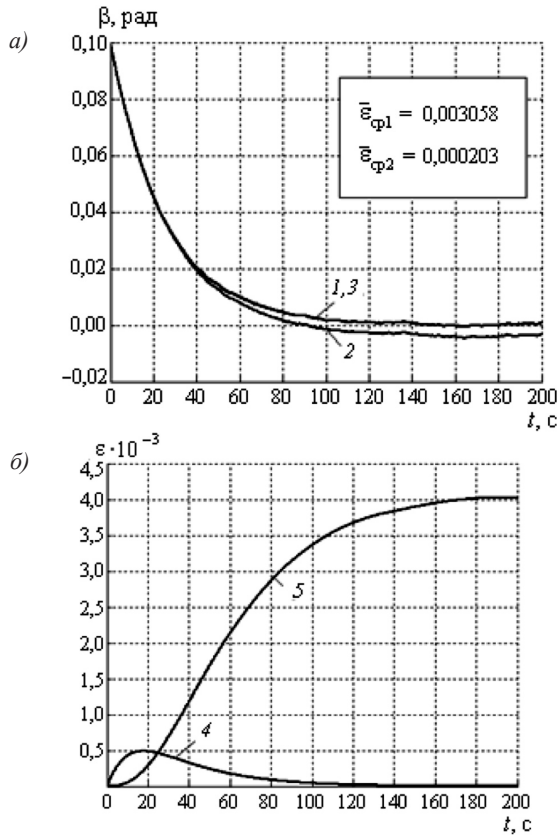
$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= -0,04\beta + 0,015(0,1041e^{-0,037t} - 0,0041)\beta(t) = \\ &= (0,0015615e^{-0,037t} - 0,0400615)\beta(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (8) будет иметь вид

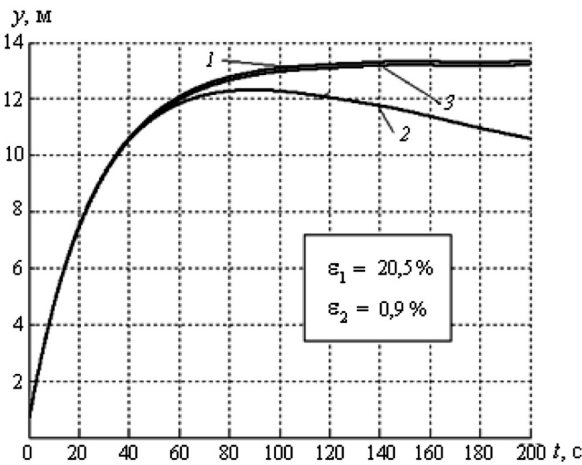
$$\beta(t) = 0,1041e^{-0,037t} - 0,0041. \quad (9)$$

Для применения модифицированной процедуры линеаризации подставим полученное решение дифференциального уравнения в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= -0,04\beta + 0,015(0,1041e^{-0,037t} - 0,0041)\beta(t) = \\ &= (0,0015615e^{-0,037t} - 0,0400615)\beta(t). \end{aligned} \quad (10)$$



**Рис. 2.** Графики изменения угла дрейфа (а) и ошибки (б): 1 — для численного решения нелинейного уравнения (7); 2 — для аналитического решения на основе разложение в ряд Тейлора (9); 3 — при использовании модифицированной процедуры линеаризации (11); 4 — ошибка при использовании модифицированной процедуры линеаризации; 5 — ошибка в ряд Тейлора



**Рис. 3.** Графики поперечного отклонения: 1 — для нелинейного уравнения; 2 — для разложения в ряд Тейлора; 3 — для модифицированной процедуры линеаризации

Решение полученного уравнения с переменными коэффициентами (10) найдем в виде

$$\beta(t) = 0,1e^{(-0,0422e^{-0,037t} - 0,0400615t + 0,0422)} \quad (11)$$

Графики изменения угла дрейфа и графики ошибок представлены на рис. 2.

Рис. 2 демонстрирует более высокую точность математической модели при использовании модифицированной процедуры линеаризации, чем при раз-

ложении в ряд Тейлора. При этом методе, как показывает рис. 3, поперечное отклонение от заданного имеет малую ошибку по сравнению с полученным при разложении в ряд Тейлора.

Далее рассмотрим продольно-горизонтальные колебания судна, которое удерживается якорной системой стабилизации. При этом уравнение динамики судна в приведенной форме имеет следующий вид [2]:

$$\ddot{x} = -0,06\dot{x} + 0,0003x + 1,5 \cdot 10^{-7} x^3 \quad (12)$$

Так как степень полинома правой части (12) равна трем, для линеаризации воспользуемся методом наименьших квадратов и получим уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -0,06\dot{x} + 0,0003x + 1,5 \cdot 10^{-7} (1977,6x - 32328) = \\ &= -0,06\dot{x} + 0,00059664x - 0,0048492, \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (13) примет вид

$$x = 19,31e^{0,009t} + 2,52e^{-0,069t} + 8,17. \quad (14)$$

Для применения модифицированной процедуры линеаризации подставим полученное решение (14) в исходное уравнение (12):

$$\ddot{x} = -0,06\dot{x} + 0,0003x + 1,5 \cdot 10^{-7} (19,31e^{0,009t} + 2,52e^{-0,069t} + 8,17)^2 x. \quad (15)$$

Запишем (15) в виде уравнений пространства состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= (0,0003 + 1,5 \cdot 10^{-7} (19,31e^{0,009t} + 2,52e^{-0,069t} + 8,17)^2)x_1 - 0,06x_2. \end{aligned}$$

В матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{X}; \\ \mathbf{A}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,0003 + 1,5 \cdot 10^{-7} (19,31e^{0,009t} + 2,52e^{-0,069t} + 8,17)^2 & -0,06 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Данное дифференциальное уравнение решается с использованием матрицанта. Решение будет иметь вид [7]

$$x(t) = \mathbf{M}(t)x(0),$$

где  $\mathbf{M}(t)$  — матрицант, определяемый с помощью метода последовательных приближений:

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{E} + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{A}(\tau)d\tau,$$

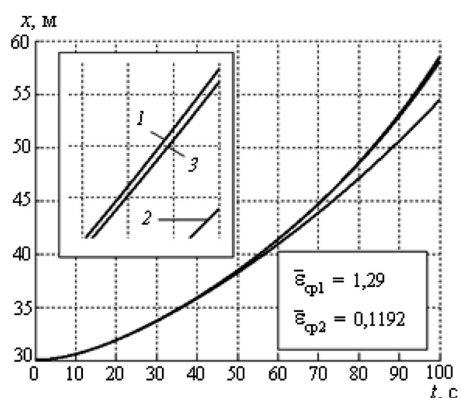
где  $\mathbf{M}_0 \equiv 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Аналитическое решение линейного уравнения (15) с переменными коэффи-

циентами с помощью матрицанта достаточно громоздко, поэтому используем численные методы [1, 3].

Применив модифицированную процедуру линеаризации и метод наименьших квадратов, получим кривые реакции якорной системы (рис. 4).

Как следует из рис. 4, использование модифицированной процедуры линеаризации дает, по сравнению с методом наименьших квадратов, более точную математическую модель. При подстановке данных уравнений для расчета силы натяжения троса получим графики сил на рис. 5.

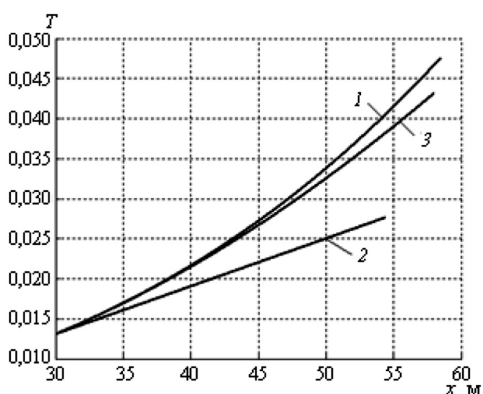


**Рис. 4.** Графики продольного смещения судна: 1 — численное решение нелинейного уравнения; 2 — после линеаризации методом наименьших квадратов; 3 — после линеаризации модифицированной процедурой линеаризации

Как видно, сила, полученная при использовании модифицированной процедуры линеаризации, более приближена к исходной, чем вычисленная с помощью метода наименьших квадратов.

## ВЫВОДЫ

1. Результаты моделирования показали, что модифицированная процедура линеаризации позволяет получить более точную линейную математическую модель из исходной нелинейной по



**Рис. 5.** Графики изменения силы натяжения троса: 1 — численное решение исходной математической модели; 2 — при использовании метода наименьших квадратов; 3 — с применением модифицированной процедуры линеаризации

сравнению с классическими методами линеаризации нелинейных объектов со «слабой» нелинейностью (разложение в ряд Тейлора, метод наименьших квадратов). 2. Используя полученные нестационарные линейные модели морских подвижных объектов, можно применять ранговые аналитические критерии оценки системной управляемости и достаточно хорошо развитые для линейных моделей методы синтеза систем автоматического управления.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Бахвалов, Н. С.** Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов. — М. : Наука, 1973. — 663 с.
- [2] **Владинец, Г. И.** Методика расчета усилий в якорной системе [Текст] / Г. И. Владинец, В. Л. Тимченко // Совершенствование судовых устройств и гибких конструкций : сб. науч. трудов. — Николаев : НКИ, 1988. — С. 68–72.
- [3] **Калиткин, Н. Н.** Численные методы [Текст] / Н. Н. Калиткин. — М. : Наука, 1978. — 512 с.
- [4] **Кеглин, Б. Г.** Линеаризация динамических систем с нелинейными элементами [Текст] / Б. Г. Кеглин // Вестник Брянского государственного технического университета. — Брянск : БГТУ, 2007. — № 4 (16). — С. 10–15.
- [5] **Лукомский, Ю. А.** Системы управления морскими подвижными объектами [Текст] : учебник / Ю. А. Лукомский, В. С. Чугунов. — Л. : Судостроение, 1988. — 272 с.

- [6] **Першиц, Р. Я.** Управляемость и управление судном [Текст] / Р. Я. Першиц. — Л. : Судостроение, 1983. — 272 с.
- [7] **Сигорский, В. П.** Математический аппарат инженера [Текст] / В. П. Сигорский. — М. : Техника, 1977. — 768 с.
- [8] **Тимченко, В. Л.** Квазілінеаризація нелінійних динамічних систем при допустимих коливаннях [Текст] / В. Л. Тимченко // Комп'ютерні технології // Вісник Миколаївського державного гуманітарного університету. — Миколаїв : МДГУ, 2008. — № 77. — С. 190–196.
- [9] **Чаки, Ф.** Современная теория управления [Текст] / Ф. Чаки. — М. : Мир, 1975. — 424 с.