УДК 514.85
Б 28

ОБЧИСЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛІГОНАЛЬНИХ І ПОЛІЕДРАЛЬНИХ КЛІТИННИХ КОМПЛЕКСІВ

Ю. А. Батрак, доц., канд. техн. наук[1];
Є. М. Чорний, інж.[2]
[1] *ЧП «Інтелектуальні морські технології», м. Миколаїв*
[2] *Національний університет кораблебудування, м. Миколаїв*

Анотація. Наведені прості формули, які отримані аналітичним інтегруванням, придатні для побудови ефективних алгоритмів, що виключають накопичення обчислювальної похибки й не залежать від особливостей форми полігонів і просторового розташування граней поверхонь та поліедрів.
Ключові слова: клітинні комплекси, геометричні характеристики, плоскі області, тіла, поверхні.

Аннотация. Приведены простые формулы, которые получены путем аналитического интегрирования, пригодны для построения эффективных алгоритмов, исключающих накопление вычислительной ошибки и не зависящих от особенностей формы полигонов и пространственного расположения граней поверхностей и полиэдров.
Ключевые слова: клеточные комплексы, геометрические характеристики, плоские области, тела, поверхности.

Abstract. Simple formulas are given which were obtained through analytical integration. They can be used for developing effective algorithms which exclude accumulation of calculation errors and do not depend on characteristics of polygons shapes and spatial position of surface facets and polyhedrons.
Keywords: cell complexes, dimensional characteristics, plain areas, bodies, surfaces.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Зважаючи на те, що кількість граней полігональних та поліедральних клітинних комплексів у практичних задачах розрахунків геометричних характеристик елементів корпусу судна може сягати сотень тисяч, питання ефективності алгоритмів обчислень є надзвичайно важливим. Геометричні характеристики плоских областей, поверхонь або тіл обраховуються як певні подвійні, поверхневі та потрійні інтеграли за заданою областю.

Мірність такого роду інтегралів у деяких випадках може бути знижена на одиницю за рахунок використання формул Гріна, Стокса й Остроградського–Гаусса [1]. Отже, подвійні й поверхневі інтеграли можуть бути зведені до криволінійних по замкненому контуру, а потрійні — до поверхневих інтегралів по замкненій поверхні, які, у свою чергу, також можуть бути зведені до криволінійних інтегралів по замкнених контурах. У випадку полігональних і поліедральних клітинних комплексів [3] структури даних, які їх описують, ідеально підходять для здійснення подібного спрощення.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Ідея застосування описаного підходу не є новою, на його основі в роботі [5] був отриманий алгоритм обчислення механічних характеристик однорідних поліедрів. Проте, незважаючи на твердження про точність алгоритму, у згаданій статті не порушено питання про вибір допоміжних функцій інтегралів зменшеної мірності, не надаються вагомі аргументи, що підтверджують точність та ефективність алгоритмів особливо в екстремальних випадках. Але чи не найбільшим недоліком, на наш погляд, є те, що в статті [5] не наводяться замкнені формули, якими можна було б скористатися для обчислення окремих інтегралів, не вдаючись до виконання алгоритму, розрахованого на обчислення всіх характеристик одночасно. Крім того, у роботі [4] показана неефективність отриманого алгоритму й висловлюється припущення про можливість отримання спрощених залежностей на основі такого підходу.

Алгоритм, наведений у роботі [4], дозволяє розраховувати не тільки характеристики поліедрів, але й геометричні характеристики поверхонь. Однак цей алгоритм базується на поданні області інтегрування симпліціальним комплексом, тобто для його використання потрібно попередньо тріангулювати область інтегрування.

МЕТА РОБОТИ — виведення ефективних замкнених формул для обчислення геометричних характеристик областей, зображених довільними полігональними й поліедральними клітинними комплексами, тобто плоских областей, обмежених полігонами, кусково-лінійних поверхонь та поліедрів.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Область у двовимірному просторі

З використанням формули Гріна обчислення подвійного інтеграла може бути зведено до обчислення криволінійного інтеграла по контуру, що обмежує область інтегрування:

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy.$$

Нехай контур плоскої області D подається полігоном L, що заданий списком упорядкованих пар координат вершин (x_i, y_i), $i=1, 2, 3, \ldots, k+1$, де k — число сторін полігону. Список вершин полігону у правій системі координат складається обходом полігону проти годинникової стрілки (рис. 1). При цьому кожен i-й відрізок полігону від першого до k-го своїм початком і кінцем буде мати точки з координатами (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}), які у подальшому будемо позначати як (x_1, y_1) і (x_2, y_2).

Обчислення подвійних інтегралів за формулою Гріна вимагає відповідного вибору допоміжних функцій P і Q. Ці функції можна вибирати декількома способами: можна, наприклад, узяти рівною нулю функцію P або Q, а ту, яка залишилася, підібрати так, щоб отримати потрібну підінтегральну функцію $F(x, y)$, можливо також обидві функції взяти ненульовими.

Було випробувано всі три можливості. Отримані формули для елементів криволінійних інтегралів відрізнялися довжиною і структурою (найдовшими були формули, отримані з використанням двох допоміжних функцій). Під час тестування всі вони, як слід було очікувати, дали однаковий результат. Це навело на думку про існування в отриманих формулах членів, які компенсують один одного під час обчислення сум.

Щоб упевнитися в цьому, були розглянуті аналітичні вирази для інтегралів по двовимірній області найпростішої форми у вигляді трикутника. У результаті було з'ясовано, що доданки, які містять лише координати вузла, розташованого між двома відрізками контуру, входять до формул елементів інтегралів суміжних відрізків полігону з протилежними знаками. Отже, якщо виключити ці члени з формул для елементів інтегралів, то, незважаючи на те що така формула вже не відповідатиме у точності значенню інтеграла по відрізку, підсумкове значення інтеграла по замкненому контуру буде точним. Виключення аналітичним шляхом однакових за модулем доданків дозволяє уникнути малих різниць близьких величин [2].

Після того як ці члени були видалені з формул, отриманих з використанням різних підходів до вибору допоміжних функцій, усі результати виявилися однаковими незалежно від вибору допоміжних функцій. Модифіковані формули для елементів криволінійних інтегралів та їх скорочені позначення наведені у табл. 1. Кортеж (x, y) у скорочених позначеннях формул слід розуміти не як аргументи функції, а як імена першої та другої координатних осей, відповідно

Таблиця 1. Формули для обчислення елементів подвійних інтегралів

Подвійний інтеграл	Модифікована формула елемента криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iint_D dx\,dy$	$\frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)$	$\frac{1}{2} f(x, y)$
$\iint_D x\,dx\,dy$	$\frac{1}{6} f(x, y)(x_1 + x_2)$	$\frac{1}{6}\zeta_1(x, y)$
$\iint_D y\,dx\,dy$	$\frac{1}{6} f(x, y)(y_1 + y_2)$	$\frac{1}{6}\zeta_2(x, y)$
$\iint_D x^2 dx\,dy$	$\frac{1}{12} f(x, y)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$	$\frac{1}{12}\delta_1(x, y)$
$\iint_D y^2 dx\,dy$	$\frac{1}{12} f(x, y)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$	$\frac{1}{12}\delta_2(x, y)$
$\iint_D xy\,dx\,dy$	$\frac{1}{24} f(x, y)\left[x_1(2y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 2y_2)\right]$	$\frac{1}{24}\sigma(x, y)$
$\iint_D x^2 y\,dx\,dy$	$\frac{1}{60} f(x, y)\left[x_1 y_1(3x_1 + 2x_2) + x_1^2 y_2 + x_2^2 y_1 + x_2 y_2(2x_1 + 3x_2)\right]$	$\frac{1}{60}\chi_1(x, y)$
$\iint_D xy^2 dx\,dy$	$\frac{1}{60} f(x, y)\left[x_1 y_1(3y_1 + 2y_2) + x_1 y_2^2 + x_2 y_1^2 + x_2 y_2(2y_1 + 3y_2)\right]$	$\frac{1}{60}\chi_2(x, y)$
$\iint_D x^3 dx\,dy$	$\frac{1}{20} f(x, y)(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)$	$\frac{1}{20}\eta_1(x, y)$
$\iint_D y^3 dx\,dy$	$\frac{1}{20} f(x, y)(y_1^2 + y_2^2)(y_1 + y_2)$	$\frac{1}{20}\eta_2(x, y)$

до яких слід брати координати вузлів. Наприклад, $f(y, z)$ означатиме $y_1z_2 - y_2z_1$, а $f(z, x)$ — $z_1x_2 - z_2x_1$.

Площа F, статичні моменти S_x, S_y, моменти інерції відносно координатних осей J_x, J_y, а також відцентровий момент інерції I_{xy} плоскої області D обчислюються як подвійні інтеграли:

$$F = \iint_D dx\,dy; \quad S_x = \iint_D y dx\,dy; \quad S_y = \iint_D x dx\,dy;$$

$$J_x = \iint_D y^2 dx\,dy; \quad J_y = \iint_D x^2 dx\,dy; \quad I_{xy} = \iint_D xy\,dx\,dy.$$

За допомогою формул табл. 1 вказані вище інтеграли у випадку області, обмеженої полігоном, зводяться до обчислення таких сум за сторонами полігону:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} f(x, y)[i]; \qquad S_x = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{k} \zeta_2(x, y)[i];$$

$$S_y = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{k} \zeta_1(x, y)[i]; \qquad J_x = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{k} \delta_2(x, y)[i];$$

$$J_y = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{k} \delta_1(x, y)[i]; \qquad I_{xy} = \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{k} \sigma(x, y)[i].$$

Плоска область у тривимірному просторі

Геометричними характеристиками плоскої області у тривимірному просторі (рис. 2) є такі величини:

$$F = \iint_\Omega d\sigma, \quad S_{yz} = \iint_\Omega x\,d\sigma, \quad S_{xz} = \iint_\Omega y\,d\sigma, \quad S_{xy} = \iint_\Omega z\,d\sigma;$$

$$J_{yz} = \iint_\Omega x^2 d\sigma, \quad J_{xz} = \iint_\Omega y^2 d\sigma, \quad J_{xy} = \iint_\Omega z^2 d\sigma;$$

$$I_{yz} = \iint_\Omega yz\,d\sigma, \quad I_{xz} = \iint_\Omega xz\,d\sigma, \quad I_{xy} = \iint_\Omega xy\,d\sigma,$$

де Ω — просторово розташована плоска область, обмежена полігоном; $d\sigma$ — елемент плоскої області. Тут подвійні індекси означають координатну площину, відносно якої знаходяться геометричні характеристики.

Решту моментів інерції (три осьових і центральний) можна обчислити з використанням знайдених величин за формулами

$$I_{xx} = J_{xy} + J_{zx}; \quad I_{yy} = J_{xy} + J_{yz};$$

$$I_{zz} = J_{yz} + J_{zx}; \quad I_o = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx}.$$

Слід зазначити, що звести обчислення поверхневого інтеграла до контурного з використанням формули Стокса

$$\iint_\Omega F(x, y, z) d\sigma = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

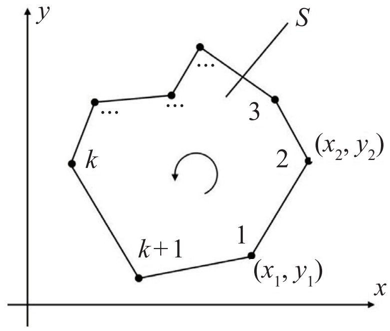

Рис. 1

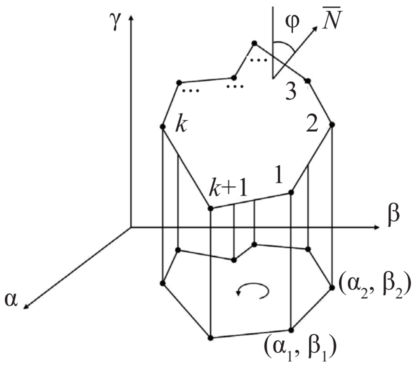

Рис. 2

у даній задачі неможливо, крім випадку підрахунку площі. Покажемо це на прикладі обчислення статичного моменту S_{yz}, для якого підінтегральна функція $F(x, y, z) = x$:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) n_x + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) n_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) n_z = x,$$

де $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \cos\beta$, $n_z = \cos\gamma$ — напрямні косинуси нормалі до поверхні.

Оскільки рівняння одне, а невідомих допоміжних функцій три, то дві з них можуть вибиратися довільно, а третя має визначатися з рівняння. Виберемо $R = \frac{xy}{2n_x}$, $Q = -\frac{xz}{2n_x}$, тоді функція P повинна задовольняти такі дві умови:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{y}{2n_x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{z}{2n_x}.$$

Диференціюючи перше по y, а друге по z, отримуємо суперечність

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = \frac{1}{2n_x} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = -\frac{1}{2n_x},$$

тобто підібрати потрібні допоміжні функції для розв'язання поставленої задачі неможливо.

Отже, формула Стокса для розрахунку геометричних характеристик поверхні непридатна. У випадку просторово розташованої плоскої області, в якої напрямні косинуси нормалі є константами, інтеграли можна обчислювати із застосуванням формули Гріна до проекції області Ω на одну з координатних площин.

Якщо проекція здійснюється, наприклад, на площину xOy, то загальна формула буде мати вигляд

$$\iint_{\Omega} F(x,y)d\sigma = \frac{1}{n_z}\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \frac{1}{n_z}\oint_{L_{xy}} P\,dx + Q\,dy,$$

де D_{xy} — проекція плоскої області Ω на площину xOy; L_{xy} — проекція полігону, що обмежує область; n_z — косинус кута між нормальним вектором плоскої області і віссю z. Щоб уникнути аналізу розташування нормального вектора площини внаслідок її двосторонньості, завжди має братися абсолютна величина косинусу $n_\gamma = |n_z|$.

Щоб отримати найменшу обчислювальну похибку й уникнути ділення на нуль, у випадку коли просторово розташована область займає окреме положення, слід обирати проекцію на ту з координатних площин, до якої область має найменший нахил. Унаслідок цього загальна формула набуває вигляду

$$\iint_{\Omega} F(x,y)d\sigma = \frac{1}{n_\gamma}\iint_{D_{\alpha\beta}}\left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha}-\frac{\partial P}{\partial \beta}\right)d\alpha\,d\beta = \frac{1}{n_\gamma}\oint_{L_{\alpha\beta}} P\,d\alpha + Q\,d\beta.$$

Що брати за α, а що за β — залежить від того, модуль якого з напрямних косинусів має найбільше значення: якщо $|n_z|$, то $(\alpha,\beta)=(x,y)$, якщо $|n_x|$, то $(\alpha,\beta)=(y,z)$, якщо $|n_y|$, то $(\alpha,\beta)=(z,x)$.

Отже, геометричні параметри плоскої області, розташованої у тривимірному просторі, можна підрахувати за такими формулами:

$$F = \frac{1}{2n_\gamma}\sum_{i=1}^{k} f(\alpha,\beta)[i]; \quad S_{xy} = \frac{1}{6n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\xi_{xy}(\alpha,\beta)[i];$$

$$S_{yz} = \frac{1}{6n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\xi_{yz}(\alpha,\beta)[i]; \quad S_{zx} = \frac{1}{6n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\xi_{zx}(\alpha,\beta)[i];$$

$$I_{xy} = \frac{1}{12n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\psi_{xy}(\alpha,\beta)[i]; \quad I_{yz} = \frac{1}{12n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\psi_{yz}(\alpha,\beta)[i];$$

$$I_{zx} = \frac{1}{12n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\psi_{zx}(\alpha,\beta)[i]; \quad J_{xy} = \frac{1}{24n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\tau_{xy}(\alpha,\beta)[i];$$

$$J_{yz} = \frac{1}{24n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\tau_{yz}(\alpha,\beta)[i]; \quad J_{zx} = \frac{1}{24n_\gamma}\sum_{i=1}^{k}\tau_{zx}(\alpha,\beta)[i].$$

Формули для величин f, ξ, ψ, τ наведені у табл. 2 у залежності від вибору площини проекції. Передбачено варіанти формул для кожної можливої пари (α, β) координатних осей: 1. (x, y); 2. (y, z); 3. (z, x).

Параметри, що використовуються у табл. 2 при ненульових n_x, n_y, n_z, обчислюються за формулами

$$n_x = A/|\bar{N}|, \quad n_y = B/|\bar{N}|, \quad n_z = C/|\bar{N}|;$$

$$x_0 = \frac{d}{n_x}; \quad y_0 = \frac{d}{n_y}; \quad z_0 = \frac{d}{n_z};$$

$$d = -D/|\bar{N}|; \quad |\bar{N}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Величини A, B, C, D — коефіцієнти загального рівняння площини, в якій розташована область Ω:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad n_x x + n_y y + n_z z - d = 0.$$

Довільна кусково-лінійна поверхня у тривимірному просторі

У випадку довільної поверхні, що складається з N граней, результат знайдеться як сума значень по кожній з граней:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j} f(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{xy} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\xi_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{yz} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\xi_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{zx} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\xi_{zx}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{xy} = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\psi_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{yz} = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\psi_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{zx} = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\psi_{zx}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{xy} = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\tau_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{yz} = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\tau_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{zx} = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}\tau_{zx}(\alpha,\beta)[j,i].$$

Поліедр

Геометричні характеристики поліедра визначаються як потрійні інтеграли:

$$V = \iiint_V dv, \quad S_{xy} = \iiint_V z\,dv, \quad S_{yz} = \iiint_V x\,dv, \quad S_{zx} = \iiint_V y\,dv;$$

$$J_{xy} = \iiint_V z^2 dv, \quad J_{yz} = \iiint_V x^2 dv, \quad J_{zx} = \iiint_V y^2 dv;$$

$$I_{xy} = \iiint_V xy\,dv, \quad I_{yz} = \iiint_V yz\,dv, \quad I_{zx} = \iiint_V zx\,dv.$$

Таблиця 2. Формули для обчислення елементів поверхневих інтегралів

Поверхневий інтеграл	Модифікована формула елемента криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iint\limits_{\Omega} d\sigma$	1. $\frac{1}{2n_z}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$; 2. $\frac{1}{2n_x}(y_1 z_2 - y_2 z_1)$; 3. $\frac{1}{2n_y}(z_1 x_2 - z_2 x_1)$	$\frac{1}{2n_\gamma} f(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} z\, d\sigma$	1. $\frac{1}{6n_z} f(x, y)(z_1 + z_2 + z_0)$; 2. $\frac{1}{6n_x} f(y, z)(z_1 + z_2)$; 3. $\frac{1}{6n_y} f(z, x)(z_1 + z_2)$	$\frac{1}{6n_\gamma} \xi_{xy}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} x\, d\sigma$	1. $\frac{1}{6n_z} f(x, y)(x_1 + x_2)$; 2. $\frac{1}{6n_x} f(y, z)(x_1 + x_2 + x_0)$; 3. $\frac{1}{6n_y} f(z, x)(x_1 + x_2)$	$\frac{1}{6n_\gamma} \xi_{yz}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} y\, d\sigma$	1. $\frac{1}{6n_z} f(x, y)(y_1 + y_2)$; 2. $\frac{1}{6n_x} f(y, z)(y_1 + y_2)$; 3. $\frac{1}{6n_y} f(z, x)(y_1 + y_2 + y_0)$	$\frac{1}{6n_\gamma} \xi_{zx}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} z^2 d\sigma$	1. $\frac{1}{12n_z} f(x, y)\left[z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 + z_0(z_1 + z_2 + z_0)\right]$; 2. $\frac{1}{12n_x} f(y, z)\left(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right)$; 3. $\frac{1}{12n_y} f(z, x)\left(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right)$	$\frac{1}{12n_\gamma} \psi_{xy}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} x^2 d\sigma$	1. $\frac{1}{12n_z} f(x, y)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right)$; 2. $\frac{1}{12n_x} f(y, z)\left[x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_0(x_1 + x_2 + x_0)\right]$; 3. $\frac{1}{12n_y} f(z, x)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right)$	$\frac{1}{12n_\gamma} \psi_{yz}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} y^2 d\sigma$	1. $\frac{1}{12n_z} f(x, y)\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)$; 2. $\frac{1}{12n_x} f(y, z)\left(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right)$; 3. $\frac{1}{12n_y} f(z, x)\left[y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + y_0(y_1 + y_2 + y_0)\right]$	$\frac{1}{12n_\gamma} \psi_{zx}(\alpha, \beta)$

Продовження табл. 2

Поверхневий інтеграл	Модифікована формула елемента криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iint\limits_{\Omega} xy\, d\sigma$	1. $\frac{1}{24n_z} f(x,y)\left[x_1(2y_1+y_2)+x_2(y_1+2y_2)\right]$; 2. $\frac{1}{24n_x} f(y,z)\left[x_1(2y_1+y_2)+x_2(y_1+2y_2)+x_0(y_1+y_2)\right]$; 3. $\frac{1}{24n_y} f(z,x)\left[x_1(2y_1+y_2)+x_2(y_1+2y_2)+y_0(x_1+x_2)\right]$	$\frac{1}{24n_\gamma}\tau_{xy}(\alpha,\beta)$
$\iint\limits_{\Omega} yz\, d\sigma$	1. $\frac{1}{24n_z} f(x,y)\left[y_1(2z_1+z_2)+y_2(z_1+2z_2)+z_0(y_1+y_2)\right]$; 2. $\frac{1}{24n_x} f(y,z)\left[y_1(2z_1+z_2)+y_2(z_1+2z_2)\right]$; 3. $\frac{1}{24n_y} f(z,x)\left[y_1(2z_1+z_2)+y_2(z_1+2z_2)+y_0(z_1+z_2)\right]$	$\frac{1}{24n_\gamma}\tau_{yz}(\alpha,\beta)$
$\iint\limits_{\Omega} zx\, d\sigma$	1. $\frac{1}{24n_z} f(x,y)\left[z_1(2x_1+x_2)+z_2(x_1+2x_2)+z_0(x_1+x_2)\right]$; 2. $\frac{1}{24n_x} f(y,z)\left[z_1(2x_1+x_2)+z_2(x_1+2x_2)+x_0(z_1+z_2)\right]$; 3. $\frac{1}{24n_y} f(z,x)\left[z_1(2x_1+x_2)+z_2(x_1+2x_2)\right]$	$\frac{1}{24n_\gamma}\tau_{zx}(\alpha,\beta)$
$\iint\limits_{\Omega} xyz\, d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x,y)\Big\{x_1y_1(3z_1+2z_2)+x_2y_2(2z_1+3z_2)-\frac{1}{n_z}\Big[n_x(x_1^2y_2+x_2y_1^2)+$ $+n_y(x_1y_2^2+x_2y_1^2)\Big]+2,5z_0(x_1y_2+x_2y_1)\Big\}$; 2. $\frac{1}{60n_x} f(y,z)\Big\{y_1z_1(3x_1+2x_2)+y_2z_2(2x_1+3x_2)-\frac{1}{n_x}\Big[n_y(y_1^2z_2+y_2z_1^2)+$ $+n_z(y_1z_2^2+y_2z_1^2)\Big]+2,5x_0(y_1z_2+y_2z_1)\Big\}$; 3. $\frac{1}{60n_y} f(z,x)\Big\{z_1x_1(3y_1+2y_2)+z_2x_2(2y_1+3y_2)-\frac{1}{n_y}\Big[n_z(z_1^2x_2+z_2x_1^2)+$ $+n_x(z_1x_2^2+z_2x_1^2)\Big]+2,5y_0(z_1x_2+z_2x_1)\Big\}$	$\frac{1}{60n_\gamma}\kappa(\alpha,\beta)$
$\iint\limits_{\Omega} xy^2 d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x,y)\left[x_1y_1(3y_1+2y_2)+x_1y_2{}^2+x_2y_1{}^2+x_2y_2(2y_1+3y_2)\right]$; 2. $\frac{1}{60n_x} f(y,z)\Big[x_1y_1(3y_1+2y_2)+x_1y_2{}^2+x_2y_1{}^2+x_2y_2(2y_1+3y_2)+$ $+x_0(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\Big]$; 3. $\frac{1}{60n_y} f(z,x)\Big\{x_1y_1(3y_1+2y_2)+x_1y_2{}^2+x_2y_1{}^2+x_2y_2(2y_1+3y_2)+$ $+y_0\left[x_1(2y_1+y_2)+x_2(y_1+2y_2)+y_0(x_1+x_2)\right]\Big\}$	$\frac{1}{60n_\gamma}\varphi_{zx}(\alpha,\beta)$

Продовження табл. 2

Поверхневий інтеграл	Модифікована формула елемента криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iint\limits_{\Omega} zx^2 d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x, y)\left[z_1x_1(3x_1+2x_2)+z_1x_2^2+z_2x_1^2+z_2x_2(2x_1+3x_2)+\right.$ $\left.+z_0(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right];$ 2. $\frac{1}{60n_x} f(y, z)\cdot\left\{z_1x_1(3x_1+2x_2)+z_1x_2^2+z_2x_1^2+z_2x_2(2x_1+3x_2)+\right.$ $\left.+x_0\left[z_1(2x_1+x_2)+z_2(x_1+2x_2)+x_0(z_1+z_2)\right]\right\};$ 3. $\frac{1}{60n_y} f(z, x)\cdot\left[z_1x_1(3x_1+2x_2)+z_1x_2^2+z_2x_1^2+z_2x_2(2x_1+3x_2)\right]$	$\frac{1}{60n_\gamma}\varphi_{yz}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} x^2 y\, d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x, y)\left[x_1y_1(3x_1+2x_2)+x_1^2y_2+x_2^2y_1+x_2y_2(2x_1+3x_2)\right];$ 2. $\frac{1}{60n_x} f(y, z)\left[x_1y_1(3x_1+2x_2)+x_1^2y_2+x_2^2y_1+x_2y_2(2x_1+3x_2)+\right.$ $\left.+x_0\left[y_1(2x_1+x_2)+y_2(x_1+2x_2)+x_0(y_1+y_2)\right]\right];$ 3. $\frac{1}{60n_y} f(z, x)\left\{x_1y_1(3x_1+2x_2)+x_1^2y_2+x_2^2y_1+x_2y_2(2x_1+3x_2)+\right.$ $\left.+y_0(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\right\}$	$\frac{1}{60n_\gamma}\mu_{zx}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} y^2 z\, d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x, y)\left\{y_1z_1(3y_1+2y_2)+y_1^2z_2+y_2^2z_1+y_2z_2(2y_1+3y_2)+\right.$ $\left.+z_0(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\right\};$ 2. $\frac{1}{60n_x} f(y, z)\left[y_1z_1(3y_1+2y_2)+y_1^2z_2+y_2^2z_1+y_2z_2(2y_1+3y_2)\right];$ 3. $\frac{1}{60n_y} f(z, x)\left[y_1z_1(3y_1+2y_2)+y_1^2z_2+y_2^2z_1+y_2z_2(2y_1+3y_2)+\right.$ $\left.+y_0\left[z_1(2y_1+y_2)+z_2(y_1+2y_2)+y_0(z_1+z_2)\right]\right]$	$\frac{1}{60n_\gamma}\mu_{xy}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} z^2 x\, d\sigma$	1. $\frac{1}{60n_z} f(x, y)\left[z_1x_1(3z_1+2z_2)+z_1^2x_2+z_2^2x_1+z_2x_2(2z_1+3z_2)+\right.$ $\left.+z_0\left[x_1(2z_1+z_2)+x_2(z_1+2z_2)+z_0(x_1+x_2)\right]\right];$ 2. $\frac{1}{60n_x} f(y, z)\left\{z_1x_1(3z_1+2z_2)+z_1^2x_2+z_2^2x_1+z_2x_2(2z_1+3z_2)+\right.$ $\left.+x_0(z_1^2+z_1z_2+z_2^2)\right\};$ 3. $\frac{1}{60n_y} f(z, x)\left[z_1x_1(3z_1+2z_2)+z_1^2x_2+z_2^2x_1+z_2x_2(2z_1+3z_2)\right]$	$\frac{1}{60n_\gamma}\mu_{yz}(\alpha, \beta)$
$\iint\limits_{\Omega} x^3 d\sigma$	1. $\frac{1}{20n_z} f(x, y)(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2);$ 2. $\frac{1}{20n_x} f(y, z)\left\{(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)+x_0\left[x_1^2+x_1x_2+x_2^2+x_0(x_1+x_2+x_0)\right]\right\};$ 3. $\frac{1}{20n_y} f(z, x)(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)$	$\frac{1}{20n_\gamma}\rho_{yz}(\alpha, \beta)$

Закінчення табл. 2

Поверхневий інтеграл	Модифікована формула елемента криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iint\limits_{\Omega} y^3 d\sigma$	1. $\frac{1}{20n_z} f(x,y)(y_1^2+y_2^2)(y_1+y_2)$; 2. $\frac{1}{20n_x} f(y,z)(y_1^2+y_2^2)(y_1+y_2)$; 3. $\frac{1}{20n_y} f(z,x)\Big\{(y_1^2+y_2^2)(y_1+y_2)+$ $+y_0\left[y_1^2+y_1y_2+y_2^2+y_0(y_1+y_2+y_0)\right]\Big\}$	$\frac{1}{20n_\gamma}\rho_{zx}(\alpha,\beta)$
$\iint\limits_{\Omega} z^3 d\sigma$	1. $\frac{1}{20n_z} f(x,y)\Big\{(z_1^2+z_2^2)(z_1+z_2)+z_0\left[z_1^2+z_1z_2+z_2^2+z_0(z_1+z_2+z_0)\right]\Big\}$; 2. $\frac{1}{20n_x} f(y,z)(z_1^2+z_2^2)(z_1+z_2)$; 3. $\frac{1}{20n_y} f(z,x)(z_1^2+z_2^2)(z_1+z_2)$	$\frac{1}{20n_\gamma}\rho_{xy}(\alpha,\beta)$

Решта моментів інерції (три осьових і центральний) знаходяться з використанням знайдених величин за формулами

$$I_{xx}=J_{xy}+J_{zx};\quad I_{yy}=J_{xy}+J_{yz};$$
$$I_{zz}=J_{yz}+J_{zx};\quad I_o=J_{xy}+J_{yz}+J_{zx}.$$

Застосовуючи формулу Остроградського–Гаусса, можна перетворити потрійний інтеграл на поверхневий:

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)dV=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=$$
$$=\oiint\limits_{\Omega}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma.$$

Оскільки поверхня, що обмежує поліедр, складається із плоских граней, то поверхневі інтеграли можна обчислити як суму поверхневих інтегралів по кожній з окремих плоских граней із застосуванням формул табл. 2.

Допоміжні функції P, Q, R у даному випадку можна вибрати багатьма способами. Очевидно, що з точки зору простоти формул доцільно обирати лише одну функцію, відмінну від нуля. Але тут теж не можна обмежуватися вибором лише однієї певної функції.

На вибір ненульової функції може вплинути конкретний склад граней. Наприклад, якщо відсоток граней поліедра, для яких $n_x=0$, є великим, то доцільно під час обчислення використовувати формули, що відповідають випадку $P\neq 0$. Якщо ж не зважати на можливість скорочення обчислень за рахунок пропуску граней з нульовим напрямним косинусом, то, очевидно, вибір функції не буде впливати на ефективність обчислень.

У табл. 3 для кожного інтеграла наведені по три формули для кожного варіанта вибору ненульової функції.

Оскільки поверхня поліедра складається з N граней, формули для обчислення його геометричних характеристик будуть мати такий вигляд:

$$V=\frac{1}{6}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}v(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{xy}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}s_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{yz}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}s_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$S_{zx}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}s_{zx}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{xy}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}j_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{yz}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}j_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$J_{zx}=\frac{1}{24}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}j_{zx}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{xy}=\frac{1}{60}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}i_{xy}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{yz}=\frac{1}{60}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}i_{yz}(\alpha,\beta)[j,i];$$

$$I_{zx}=\frac{1}{60}n_\nu\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{n_\gamma[j]}\sum_{i=1}^{k_j}i_{zx}(\alpha,\beta)[j,i].$$

Таблиця 3. Формули для обчислення елементів потрійних інтегралів

Інтеграл	Формула елемента поверхневого інтеграла	Елемент криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iiint\limits_V dV$	$n_x \iint\limits_\Omega x\, d\sigma$; $n_y \iint\limits_\Omega y\, d\sigma$; $n_z \iint\limits_\Omega z\, d\sigma$	$\frac{1}{6n_\Upsilon} n_x \xi_{yz}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{6n_\Upsilon} n_y \xi_{zx}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{6n_\Upsilon} n_z \xi_{xy}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{6} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} v(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V y\, dV$	$n_x \iint\limits_\Omega xy\, d\sigma$; $\frac{1}{2} n_y \iint\limits_\Omega y^2 d\sigma$; $n_z \iint\limits_\Omega yz\, d\sigma$	$\frac{1}{24n_\Upsilon} n_x \tau_{xy}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_y \psi_{zx}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_z \tau_{yz}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{24} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} s_{zx}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V z\, dV$	$n_x \iint\limits_\Omega zx\, d\sigma$; $n_y \iint\limits_\Omega yz\, d\sigma$; $\frac{1}{2} n_z \iint\limits_\Omega z^2 d\sigma$	$\frac{1}{24n_\Upsilon} n_x \tau_{zx}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_y \tau_{yz}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_z \psi_{xy}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{24} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} s_{xy}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V x\, dV$	$\frac{1}{2} n_x \iint\limits_\Omega x^2 d\sigma$; $n_y \iint\limits_\Omega yx\, d\sigma$; $n_z \iint\limits_\Omega zx\, d\sigma$	$\frac{1}{24n_\Upsilon} n_x \psi_{yz}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_y \tau_{xy}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{24n_\Upsilon} n_z \tau_{yz}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{24} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} s_{yz}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V y^2 dV$	$n_x \iint\limits_\Omega xy^2 d\sigma$; $\frac{1}{3} n_y \iint\limits_\Omega y^3 d\sigma$; $n_z \iint\limits_\Omega y^2 z\, d\sigma$	$\frac{1}{60n_\Upsilon} n_x \phi_{zx}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{60n_\Upsilon} n_y \rho_{zx}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{60n_\Upsilon} n_z \mu_{xy}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} j_{zx}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V z^2 dV$	$n_x \iint\limits_\Omega xz^2 d\sigma$; $n_y \iint\limits_\Omega yz^2 d\sigma$; $\frac{1}{3} n_z \iint\limits_\Omega z^3 d\sigma$	$\frac{1}{60n_\Upsilon} n_x \mu_{yz}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{60n_\Upsilon} n_y \phi_{xy}(\alpha,\beta)$; $\frac{1}{60n_\Upsilon} n_z \rho_{xy}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} j_{xy}(\alpha,\beta)$

Продовження табл. 3

Інтеграл	Формула елемента поверхневого інтеграла	Елемент криволінійного інтеграла	Скорочене позначення формули
$\iiint\limits_V x^2 dV$	$\frac{1}{3} n_x \iint\limits_\Omega x^3 d\sigma;$ $n_y \iint\limits_\Omega x^2 y\, d\sigma;$ $n_z \iint\limits_\Omega x^2 z\, d\sigma$	$\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_x \rho_{yz}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_y \mu_{zx}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_z \phi_{yz}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} j_{yz}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V zx\, dV$	$\frac{1}{2} n_x \iint\limits_\Omega x^2 z\, d\sigma;$ $n_y \iint\limits_\Omega xyz\, d\sigma;$ $\frac{1}{2} n_z \iint\limits_\Omega xz^2 d\sigma$	$\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_x \phi_{yz}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_y \kappa(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_z \mu_{yz}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} i_{zx}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V xy\, dV$	$\frac{1}{2} n_x \iint\limits_\Omega x^2 y\, d\sigma;$ $\frac{1}{2} n_y \iint\limits_\Omega xy^2 d\sigma;$ $n_z \iint\limits_\Omega xyz\, d\sigma$	$\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_x \mu_{zx}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_y \phi_{zx}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_z \kappa(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\gamma} i_{xy}(\alpha,\beta)$
$\iiint\limits_V yz\, dV$	$n_x \iint\limits_\Omega xyz\, d\sigma;$ $\frac{1}{2} n_y \iint\limits_\Omega y^2 z\, d\sigma;$ $\frac{1}{2} n_z \iint\limits_\Omega yz^2 d\sigma$	$\frac{1}{60 n_\Upsilon} n_x \kappa(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_y \mu_{xy}(\alpha,\beta);$ $\frac{1}{60 n_\Upsilon} \frac{1}{2} n_z \phi_{xy}(\alpha,\beta)$	$\frac{1}{60} n_\nu \frac{1}{n_\Upsilon} i_{yz}(\alpha,\beta)$

ВИСНОВКИ

1. Отримані прості формули для обчислення геометричних характеристик областей, заданих дво- і тривимірними клітинними комплексами. Для використання формул потрібно перенумерувати вершини комплексу, задати їх декартові координати у правій системі координат, описати грані комплексу списками вершин полігонів, що обмежують грані. Списки складаються обходом грані проти годинникової стрілки, якщо дивитися зі сторони зовнішньої нормалі грані. Якщо використовується ліва система координат, обхід слід здійснювати за годинниковою стрілкою.

2. Формули можуть застосовуватися до обчислення окремих характеристик без обчислення решти.

3. Виведені формули не приводять до виникнення малих різниць близьких величин за рахунок аналітичного виключення членів суми, які мають однаковий модуль, але протилежні за знаком, що робить їх стійкими до обчислювальних похибок.

4. Знайшла підтвердження гіпотеза Девіда Еберлі [4] про можливість отримання спрощених виразів для обчислення інтегралів способом проекцій, використаним Брайяном Міртічем [5].

5. На основі отриманих формул можливо побудувати ефективні алгоритми, розробці й аналізу яких має бути присвячена окрема стаття.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] **Корн, Г.** Справочник по математике [для инженеров и научных работников] [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1973. — 831 с.

[2] **Мак-Кракен, Д.** Численные методы и программирование на Фортране [Текст] / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. — М. : Мир, 1977. — 584 с.

[3] **Рохлин, В. А.** Начальный курс топологии. Геометрические главы [Текст] / В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. — М. : Наука, 1977. — 487 с.

[4] **Eberly, D.** Polyhedral Mass Properties. Geometric Tools, Last Modified [Електронний ресурс] / D. Eberly. — Режим доступу: http://www.magic-software.com.

[5] **Mirtich, B.** Fast and Accurate Computation of Polihedral Mass Properties [Text] / B. Mirtich // J. of graphics tools. — 1996. — Vol. 1, Nr 2. — P. 31–50.

Надійшла до редколегії 18.06.12

Статтю рекомендує до друку член редколегії Вісника НУК
д-р техн. наук, проф. *В. О. Нєкрасов*

Статтю розміщено у Віснику НУК №4, 2012